

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ?

Ю.Б. Румер, М.С. Рывкин

# ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Ю. Б. Румер  
М. С. Рывкин

УЧПЕДГИЗ

1 9 5 0

Ю. Б. Румер  
М. С. Рывкин

# ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Москва 1960

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Глава I. Относительность в классической физике	
§ 1. Картина мира классической физики. Атомы и эфир . .	5
§ 2. Классический принцип относительности . . . . .	10
§ 3. Относительность, абсолютность и их математическое выражение. Преобразования Галилея . . . . .	13
§ 4. Мысленный эксперимент Максвелла и опыт Майкельсона. . . . .	24
Глава II. Кинематика теории относительности	
§ 5. Постулаты Эйнштейна . . . . .	35
§ 6. Преобразования Лорентца . . . . .	39
§ 7. Теорема сложения скоростей Эйнштейна . . . . .	44
§ 8. Сокращение длин и замедление хода движущихся часов . . . . .	52
§ 9. Интервал. . . . .	62
Глава III. Динамика теории относительности	
§ 10. Зависимость массы от скорости . . . . .	75
§ 11. Релятивистский закон движения . . . . .	86
§ 12. Закон взаимной связи массы и энергии . . . . .	98
§ 13. Квантовая теория света . . . . .	119
§ 14. Четырехмерная геометрия Минковского. Четырехмерные векторы . . . . .	136
Глава IV. Теория поля	
§ 15. Уравнения Максвелла — Лорентца и их интегрирование . . . . .	155
§ 16. Четырехмерные векторы плотности тока и потенциала . .	160
§ 17. Гравитационное поле. Принцип эквивалентности . . .	173
§ 18. Гравитация и геометрия . . . . .	187

*Ю. Б. Румер, М. С. Рывкин*

### ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Редакторы *А. А. Гобанов* и *Ю. Н. Дрожжин*.

Обложка художника *Е. А. Десятова*.

Художественный редактор *И. Л. Волкова*.

Технический редактор *В. И. Корнеева*.

Корректор *О. М. Сыздалова*

Сдано в набор 30/IX 1959 г. Подписано к печати 27 II 1960 г. 84×108<sup>1/32</sup>.  
Печ. л. 13,25 (10.87). Уч.-изд. л. 9,15. Тираж 20 тыс. экз. А01787. Заказ 3619.  
Цена без переплётa 2 руб. 75 коп. Переплёт 80 коп.

Учпедгиз, Москва, 3-й проезд Марьиной роши, 41

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Московского  
городского Совнархоза  
Москва Ж-54. Валуевая 28

Отпечатано с набора в 1-й тип.

Трансжелдориздата МПС. Зак. 274

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Со времени создания теории относительности Альбертом Эйнштейном прошло более полувека. За это время теория относительности (наряду с квантовой механикой) стала краеугольным камнем современной физики. Современная физика без теории относительности столь же немыслима, как и без представлений об атомно-молекулярной структуре вещества или без учения об электромагнитном поле.

В наши дни теория относительности не только подтверждена огромным количеством опытных фактов, но и нашла инженерно-техническое применение при конструировании современных ускорителей заряженных частиц, при расчете ядерных реакторов, атомных и водородных бомб и т. д.

Теория относительности неизбежно привлекает к себе интерес большого круга людей благодаря тому, что с ней связана радикальная ломка и перестройка веками сложившихся представлений о свойствах пространства, времени и движения. Безусловно, теория относительности принадлежит к числу трудных дисциплин и требует для своего усвоения больших усилий и известного минимума предварительных знаний в области математики и физики.

В настоящее время существует два типа изложений теории относительности: 1) руководства университетского типа, предназначенные для читателей, специализирующихся в области теоретической физики, и требующие знания сложного математического аппарата; 2) популярные изложения теории относительности, отнюдь не претендующие на глубину и рассчитанные на весьма широкий круг читателей. При таком изложении математический аппарат вообще почти не употребляется.

Преподаватели физики советской школы, а также будущие преподаватели — студенты педагогических институтов

должны иметь серьезные и глубокие познания в области теории относительности. Однако, не являясь специалистами в области теоретической физики, они не могут пользоваться руководствами университетского типа. С другой стороны, сведения, полученные из популярных брошюр, для них далеко не являются достаточными.

Мы ставили своей целью написать руководство промежуточного типа, предназначенное для студентов педагогических институтов, учителей физики средней школы, а также для широких кругов советской интеллигенции, интересующихся современной физикой. В книге изложены основные положения и результаты теории относительности, а также важнейшие ее приложения (квантовая теория света, некоторые вопросы теории ускорителей, энергетика ядерных реакций и т. д.).

Мы стремились подходить к сложным проблемам теории относительности, исходя из широко известных элементарных процессов и законов физики (упругий и неупругий удар шаров, ускорение заряженных частиц электрическим полем и т. д.), и возможно шире иллюстрировать изложение конкретными физическими примерами.

Ввиду того, что книга предназначена для будущих учителей физики средней школы, а не для научных работников в области теоретической физики, мы не пользуемся сложным математическим аппаратом тензорного анализа, теории групп и т. д. Математический аппарат, используемый в книге, не выходит за рамки курса математики педагогических (и даже технических) институтов и требует только знания основ дифференциального и интегрального исчисления и аналитической геометрии.

Содержание книги в основном соответствует программе курса теоретической физики для педагогических институтов. Выходят за пределы программы только вопросы, изложенные в главе IV «Теория поля». Однако мы считали, что книга по теории относительности была бы не полной без краткого изложения основ теории электромагнитного поля и основ современной теории тяготения.

Книга возникла как результат обработки курса лекций, читавшегося обоими авторами в течение ряда лет студентам Новосибирского государственного педагогического института.

*Ю. Б. Румер,  
М. С. Рывкин*

## ГЛАВА I

# ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ В КЛАССИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

### § 1. Картина мира классической физики. Атомы и эфир

К концу XIX — началу XX в. наши знания о физических свойствах окружающего нас мира сложились в стройную систему представлений, получившую название классической физики. В основе этих представлений лежали две научные гипотезы, которые позволили предсказать и объяснить колоссальное количество наблюдаемых фактов и считались в конце XIX в. не подлежащими сомнению.

Первая из этих гипотез — атомистическая гипотеза согласно которой все вещества природы построены из мельчайших частиц — атомов и молекул.

Вторая гипотеза — о существовании эфира, т. е. особой упругой, заполняющей все пространство между атомами среды, с помощью которой осуществляется взаимодействие между атомами.

Первая из этих гипотез восходит еще к глубокой древности. Она была выдвинута греческими натурфилософами Демокритом (IV в. до н. э.), Эпикуром (III в. до н. э.) и римским ученым Лукрецием Каром (I в. до н. э.) и обосновывалась простейшими физическими наблюдениями — испарение жидкостей, взаимная диффузия жидкостей и газов, тепловое расширение тел и т. д.

В XVIII в. М. В. Ломоносов (1711—1765 гг.) впервые четко формулирует различие между понятиями атома и молекулы (элемент и корпускула у Ломоносова) и развивает представление о теплоте как о хаотическом движении этих «нечувствительных» частиц вещества.

В начале XIX в. на основе экспериментального материала, накопленного химиками, удается определить относительные веса атомов и молекул и вводятся фундаментальные понятия грамм-атома и грамм-молекулы (Авогадро, 1776—1856 гг.).

Дальнейшее развитие положения о механической природе тепла приводит в середине XIX в. к созданию кинетической теории газов и затем статистической физики (Максвелл, Больцман, Гиббс).

Во второй половине XIX в. изучение отклонений свойств газа от идеальности (поправка в уравнении Ван-дер-Ваальса), а также изучение столкновений молекул и явлений переноса (теплопроводность, диффузия, вязкое трение) позволило впервые оценить размеры молекул и атомов, которые оказались порядка нескольких  $\text{Å}$  ( $1 \text{ Å} = 10^{-8} \text{ см}$ ).

Наконец, в конце XIX — начале XX в. экспериментальное и теоретическое изучение различных видов флуктуаций привело к весьма убедительному подтверждению атомистической гипотезы.

М. Смолуховский и А. Эйнштейн создают теорию так называемого броуновского движения мелких пылинок под действием ударов молекул.

Рэлей (1842—1919 гг.), изучая флуктуации плотности воздуха в атмосфере, создает теорию голубого цвета неба. Перрен исследует распределение броуновских частиц, взвешенных в жидкости, по высоте. Эти исследования позволили различными методами определить так называемое число Авогадро (число молекул в грамм-молекуле), причем все эти методы с большой точностью приводили к одному и тому же значению ( $N \sim 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}}$ ).

Забегая вперед, следует сказать, что физика XX в. обладает абсолютно бесспорными доказательствами реальности существования атомов и молекул. Существуют приборы, с помощью которых можно фиксировать отдельные ионы (счетчики Гейгера и Гейгера — Мюллера, сцинтилляционные счетчики), наблюдать траектории частиц (камеры Вильсона, фотопластинки с толстослойной эмульсией) и даже визуально наблюдать и фотографировать отдельные крупные молекулы некоторых органических соединений с помощью электронного микроскопа, менее крупные — с помощью так называемого электронного микропроектора.

Таким образом, к началу XX в. атомистическая гипотеза из чисто умозрительной концепции становится научно установленным фактом.

Вторая гипотеза, лежащая в основе здания классической физики, — гипотеза эфира — возникла также довольно рано, однако укрепилась она в физике в начале XIX в. в связи с победой волновой теории света (Юнг — 1822 г., Френель — 1827 г.). Действительно, с точки зрения волновой теории света предположение о существовании эфира казалось совершенно естественным и необходимым.

Подобно тому как звук представляет собой волновое движение воздуха, свет мыслился как волновое движение особой упругой среды — эфира.

Изучение интерференционных и диффракционных явлений позволило определить длину световых волн — они оказались по порядку величины в тысячи раз больше размеров атомов (от 4600 Å для крайних фиолетовых лучей до 7600 Å для крайних красных лучей видимого спектра).

После того как Максвелл показал, что световые волны представляют собой весьма частный случай электромагнитного поля, стало ясно, что эфир следует рассматривать не только как среду, в которой происходит распространение света, но и как носитель электромагнитного поля. Светоносный эфир Гюйгенса — Френеля оказался тождественным с электромагнитным эфиром Фарадея.

Колоссальные успехи электродинамики и электромагнитной оптики в конце XIX в. казалось бы полностью подтверждали это положение.

Измерения скорости распространения света в согласии с теорией Максвелла показали чрезвычайно точное совпадение ее с так называемой электродинамической постоянной (отношение  $CGSM$  и  $CGSE$  единиц электрического заряда). Обе величины оказались с большой степенью точности равными  $c=3 \cdot 10^{10}$  см/сек.

Предсказание Максвелла о существовании светового давления было подтверждено классическими опытами Лебедева (1912 г.). Электромагнитные волны, существование которых вытекало из теории Максвелла, были получены экспериментально Г. Герцем и использованы А. С. Поповым (1895 г.) для целей радиопередачи. Все это делало теорию Максвелла, а следовательно, казалось бы, и идею эфира, в высшей степени убедительной.

Развитие атомистики в конце XIX в. привело к дальнейшему уточнению и сближению представлений физики атомов и физики эфира. На протяжении 90-х годов XIX в. были открыты катодные и каналовые лучи, возникающие при электрическом разряде в разреженных газах и было установлено, что катодные лучи представляют собой поток быстрых электронов, а каналовые лучи — поток положительно заряженных ионов газа, находящегося в разрядной трубке.

Стало ясно, что атомы веществ не являются элементарными, неделимыми частицами, а представляют собой сложные системы, состоящие из положительных и отрицательных зарядов.

На этой основе Г. А. Лорентцом (1853—1928 гг.) была построена так называемая электронная теория, сочетавшая представления теории Максвелла с атомистическими представлениями. В этой теории в качестве источника электромагнитного поля выступают электрические заряды, из которых построены атомы. В частности излучение света атомами в теории Лорентца описывается как результат колебаний электронов. Электроны внутри атомов совершают колебания, колеблющийся же электрон по законам электродинамики возбуждает в окружающем эфире электромагнитные волны.

Эта схема позволила в хорошем согласии с экспериментом объяснить целый ряд факторов, которые в теории Максвелла, не учитывающей атомизм электрических зарядов, оставались непонятными. Так, например, теория Лорентца дает объяснение так называемой дисперсии света (зависимости показателя преломления от частоты или длины волны падающего света).

В рамках электронной теории удалось объяснить открытое еще Фарадеем вращение плоскости поляризации света в магнитном поле, дать качественную теорию парамагнетизма. Наконец, электронная теория позволила создать теорию так называемого нормального, или простого, эффекта Зеемана (расщепление спектральных линий в магнитном поле).

Итак, стройная картина окружающего нас мира в классической физике XIX в., казалось бы вполне надежно подтвержденная экспериментом, выглядела следующим образом.

Существует бесконечно протяженный, заполняющий все пространство, упругий эфир, в который погружены атомы,

представляющие собой сложные системы электрических зарядов.

Колебания этих зарядов вызывают деформации эфира, которые распространяются в виде упругих волн и обуславливают электромагнитные взаимодействия между атомами.

Правда, в этой стройной картине мира имелись и отдельные пробелы.

В области атомистики возникали затруднения при объяснении устойчивости атомов, не удавалось дать согласующуюся с опытом теорию происхождения атомарных спектров и т. д.

Не все шло гладко и в физике эфира.

Представление об эфире как об обычной механической среде наталкивалось на серьезные затруднения. Опыт с полной определенностью указывал, что электромагнитные волны поперечны (это вытекает из существования поляризованного света). Так как поперечные волны могут распространяться только в средах, сопротивляющихся деформации сдвига, т. е. в твердых телах, то эфир следовало мыслить как твердую упругую среду. Но тогда чрезвычайно трудно объяснить тот факт, что планеты и иные небесные тела не встречают при своем движении сквозь эфир сколько-нибудь заметного сопротивления. Приходилось приписывать эфиру ничтожно малую плотность наряду с весьма значительной упругостью.

Кроме того, только весьма искусственными аргументами удавалось объяснить, почему в эфире наряду с поперечными волнами не возникают волны продольные.

Итак, попытки построения механической модели эфира сталкивались с существенными затруднениями.

Кроме того, как мы увидим в следующих параграфах, вопреки всем ожиданиям физиков, опыты, в которых надеялись обнаружить движение тел по отношению к эфиру, привели, казалось бы, к противоречащим друг другу результатам.

Тем не менее в целом система представлений классической физики казалась настолько стройной и убедительной, что физики лелеяли надежду на то, что все эти трудности окажутся преходящими, все противоречия будут объяснены и картина мира классической физики останется непоколебимой. Однако эти надежды остались тщетными: корень всех трудностей классической физики лежал гораздо глубже, чем полагали.

Для преодоления этих трудностей пришлось радикально пересмотреть целый ряд фундаментальных представлений, и это в конечном счете привело к созданию двух величайших физических теорий современности — квантовой механики и теории относительности.

## § 2. Классический принцип относительности

Теория относительности Эйнштейна, несмотря на чрезвычайную революционность своих исходных положений и выводов, представляла собой естественный результат развития физики.

Одним из ее идейных истоков является принцип относительности классической механики, установленный еще в XVII в. Галилеем.

Говоря о механическом движении, т. е. о перемещении тела в пространстве, мы всегда имеем в виду его движение относительно других тел. Для математического описания движения с этими другими телами жестко связывается так называемая система отсчета, т. е. система координат и часы для отсчета времени.

Так, например, когда мы переходим из одного вагона в другой, мы отсчитываем свое перемещение по отношению к поезду, когда мы говорим о движении поезда, мы отсчитываем его перемещение по отношению к Земле, говоря о движении Земли, мы изучаем ее перемещение по отношению к Солнцу. Однако, как установлено современной астрономией, Солнце само движется по отношению к Галактике. Несмотря на все это многообразие движений, в классической механике XVIII в. постулировалась следующая научная гипотеза: существует избранная система отсчета, которая является абсолютно покоящейся, и всякое тело, которое по отношению к ней покоится, находится в абсолютном покое, а движение тел по отношению к этой системе является абсолютным движением.

Если встать на точку зрения этой гипотезы, которая носит название гипотезы Ньютона об абсолютном пространстве, то можно говорить об абсолютной или истинной траектории тела в избранной системе отсчета, а все траектории по отношению к многочисленным движущимся системам отсчета называть относительными, или кажущимися.

Так, пока астрономы не обнаружили движение Солнца в Галактике, следовало эллиптические орбиты планет по отношению к Солнцу считать «истинными», а сложные эпициклические траектории, которые планеты описывают в системе отсчета, связанной с Землей, рассматривать как «кажущиеся».

Гипотеза об абсолютном пространстве к концу прошлого столетия значительно укрепилась в физике в связи с успехами концепции эфира. Казалось естественным считать, что абсолютная система отсчета связана с мировым эфиром, заполняющим все пространство, и рассматривать движение тел по отношению к эфиру как абсолютное движение. С этой точки зрения следовало ожидать, что в лабораториях, движущихся по отношению к эфиру, физические явления должны протекать не так, как в лабораториях, находящихся в абсолютном покое. В связи с этим существовала надежда, что, изучая явления, протекающие в движущихся лабораториях, можно разработать методы обнаружения абсолютного движения.

Однако еще на начальном этапе развития механики было установлено, что равномерное и прямолинейное движение лаборатории не только по отношению к абсолютному пространству, но и по отношению к другой лаборатории не может быть обнаружено в результате наблюдения механических явлений.

Представим себе две физические лаборатории, оснащенные всевозможными механическими приборами, из которых одна покоится, а другая находится в равномерно и прямолинейно движущемся поезде. Повседневный опыт говорит нам, что если отвлечься от толчков на стыках рельс, то пассажир, не глядя в окно, не может по своим физиологическим ощущениям судить, покоится вагон или движется равномерно и прямолинейно. Только в те моменты, когда вагон ускоряет свое движение или тормозится, или, наконец, движется по искривленному участку пути, пассажир ощущает силу, наклоняющую его соответственно в этих случаях назад, вперед или к боковой стенке вагона.

К такому же выводу приводят нас и все механические эксперименты, которые могут быть поставлены в двух наших лабораториях.

Например, наблюдая движение тела, брошенного вертикально вверх, мы видим, что в движущейся лаборатории

это тело вернется в ту же точку вагона, из которой оно было брошено, а не отклонится в сторону, противоположную движению вагона. Измерения с точнейшими хронометрами показывают, что при одинаковом начальном толчке и в покоящейся, и в движущейся лабораториях движение тела совершается в одно и то же время и поднимается оно на одну и ту же высоту.

Тело, брошенное вдоль вагона, достигает противоположной стенки за одно и то же время, движется ли оно по направлению движения поезда или в противоположном направлении, причем это время такое же, как и в покоящейся лаборатории.

Упругий удар бильярдных шаров в обеих лабораториях заканчивается разлетом на одинаковые углы и с одинаковыми скоростями, если только в двух лабораториях были одинаковы начальные скорости и направления движения. Число подобных примеров можно было бы умножить: одинаковые по массе и по длине маятники будут колебаться в обеих лабораториях с одинаковыми периодами, шары скатываются с наклонных плоскостей за одинаковое время, пружины под действием одинаковых грузов получают одинаковые растяжения и т. д.

Все это показывает, что справедлив следующий закон природы:

В двух лабораториях, движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, все механические явления протекают одинаково (при одинаковых условиях).

Это положение, сформулированное еще Галилеем, получило название классического принципа относительности, или принципа относительности Галилея.

Оговорка, сделанная нами при формулировке принципа Галилея о том, что в двух лабораториях должны быть соблюдены одинаковые условия, имеет весьма существенное значение.

Представим себе, например, тело, падающее свободно на пол лаборатории, — по отношению к этой лаборатории его траектория будет представлять собой отрезок вертикальной прямой. Однако по отношению к движущейся лаборатории это же тело вычертит отрезок параболы (если не учитывать сопротивление воздуха).

Мы видим, что траектория одного и того же тела различна в различных лабораториях (системах отсчета).

Это значит, что в этих двух системах отсчета различны также координаты и скорости движущегося тела.

Такие величины, зависящие от выбора системы отсчета, называют относительными.

Итак, координаты, скорости, траектория тела относительны и движения тела в двух наших лабораториях происходят по-разному.

Это, однако, не противоречит принципу относительности, так как в этих лабораториях различны начальные условия.

Но наблюдая движение тел внутри двух наших лабораторий, нельзя установить, какая из них движется, а какая покоится.

Это позволяет придать принципу относительности Галилея другую (отрицательную) формулировку.

Никакие опыты, проводимые внутри лаборатории с механическими приборами (представляющими собой совокупность пружин, нитей, блоков, рычагов и т. д.), не позволяют установить, покоится лаборатория или движется равномерно и прямолинейно по отношению к другой лаборатории.

Отсюда, в частности, вытекает вывод, упомянутый нами в начале параграфа.

Никакие механические опыты, проводимые внутри лаборатории, не позволяют установить, движется ли она равномерно и прямолинейно по отношению к абсолютному пространству (эффиру) или нет.

### **§ 3. Относительность, абсолютность и их математическое выражение. Преобразования Галилея**

В предыдущем параграфе мы установили, что одному и тому же объективно существующему движению материальной точки в разных системах отсчета соответствуют различные траектории, координаты, скорости движущегося тела.

С аналогичным положением мы сталкиваемся в целом ряде проблем науки и повседневной жизни.

Так, для описания предметов и событий окружающего нас мира мы пользуемся словами того или иного языка

(русского, английского, китайского и т. д.). И в этом случае одному и тому же объективно существующему предмету мы сопоставляем в разных языках различные комбинации звуков, например, хлеб — в русском языке, *das Brot* — в немецком, *the bread* — в английском и т. д. Мы говорим, что звуковое выражение понятия — слово — относительно.

Для перевода текста с одного языка на другой необходимо иметь словарь, сопоставляющий по их смыслу слова одного языка словам другого языка.

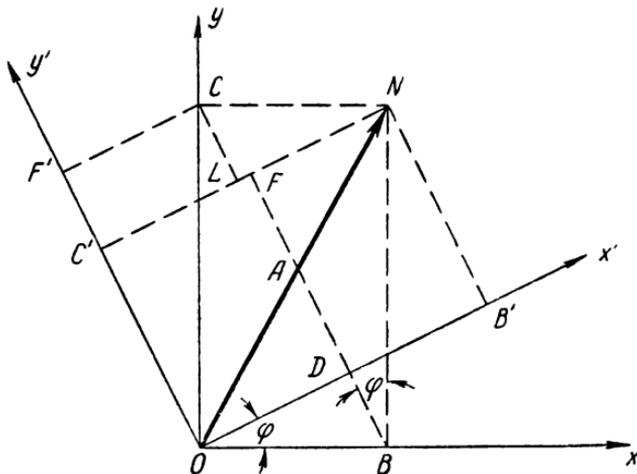


Рис. 1.

Другой важный пример дает нам аналитическая геометрия. Если мы имеем две прямоугольные системы координат  $S$  и  $S'$ , у которых начала отсчета совпадают, а оси повернуты друг относительно друга на угол  $\varphi$  (рис. 1), то один и тот же вектор  $\vec{A}$ , исходящий из начала координат, имеет в этих двух системах разные проекции —  $x$ ,  $y$  в системе  $S$  и  $x'$ ,  $y'$  в системе  $S'$ .

Мы называем координаты  $x$ ,  $y$  относительными, поскольку они имеют смысл только в заданной системе координат.

Переход от координат  $x$ ,  $y$  к координатам  $x'$ ,  $y'$  является как бы переходом от «языка» одной системы координат  $S$  к языку другой системы  $S'$ .

Что же является «словарем» для этого перехода?

Нетрудно сообразить что в данном случае «словарем» являются хорошо известные из аналитической геометрии формулы преобразования координат при повороте координатной системы. Напомним их вывод.

Из рисунка непосредственно видно, что

$$x' = OB' = OD + DB' = OD + FN.$$

Но из  $\triangle NFB$  и  $\triangle ODB$  легко видеть, что

$$FN = y \sin \varphi$$

и

$$OD = x \cos \varphi,$$

откуда

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi.$$

Аналогично

$$y' = OC' = OF' - F'C' = OF' - CL.$$

Но из  $\triangle OF'C$  и  $\triangle CLN$  следует

$$OF' = y \cos \varphi,$$

$$CL = x \sin \varphi,$$

откуда

$$y' = y \cos \varphi - x \sin \varphi.$$

Итак, формулы перехода от координат  $x, y$  к координатам  $x', y'$  имеют вид:

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi,$$

$$y' = y \cos \varphi - x \sin \varphi. \quad (1.3)$$

Однако квадрат длины вектора  $\vec{A}$ , вычисляемый по формуле  $A^2 = x^2 + y^2$  в системе  $S$  и по аналогичной формуле  $A^2 = x'^2 + y'^2$  в системе  $S'$ , по своему геометрическому смыслу абсолютен, т. е. одинаков в любой системе координат.

Следовательно, при любом вращении координатной системы должно выполняться равенство

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2, \quad (2.3)$$

выражающее абсолютность длины вектора  $\vec{A}$ .

Нетрудно видеть, что указанные преобразования удовлетворяют этому требованию. Действительно, подставляя выражения (1.3) в левую часть (2.3), получим

$$x'^2 + y'^2 = x^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + y^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = x^2 + y^2.$$

Более того, нетрудно видеть, что эти преобразования представляют собой единственные линейные преобразования, сохраняющие квадрат длины вектора  $\vec{A}$  неизменным.

Действительно, рассмотрим линейное преобразование

$$x' = ax + by$$

$$y' = cx + dy$$

и потребуем, чтобы тождественно выполнялось равенство (2.3).

Подставляя выражения  $x'$  и  $y'$  в (2.3), получим

$$x^2 (a^2 + c^2) + xy (ab + cd) + y^2 (b^2 + d^2) = x^2 + y^2.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменных  $x$ ,  $y$  в левой и правой частях равенства, будем иметь:

$$a^2 + c^2 = 1,$$

$$b^2 + d^2 = 1,$$

$$ab + cd = 0.$$

Так как из первых двух уравнений системы видно, что числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  по абсолютной величине меньше единицы, мы можем ввести обозначение  $a = \cos \varphi$  и выразить остальные коэффициенты  $b$ ,  $c$ ,  $d$  через  $\varphi$ .

Первое уравнение системы дает  $c = \pm \sin \varphi$ . Выбирая положительный знак перед корнем (это соответствует выбору вращения по часовой стрелке), получим из третьего уравнения

$$b = -d \operatorname{tg} \varphi.$$

Отсюда второе уравнение дает

$$d = \cos \varphi,$$

$$b = -\sin \varphi.$$

Мы видим, что эти линейные преобразования оказались тождественными с преобразованиями вращения (1.3).

Преобразования (1.3) сохраняют силу и для проекций вектора, не исходящего из начала координат.

Нетрудно также показать (это предлагается читателю выполнить в качестве упражнения), что преобразование (1.3) оставляет неизменным скалярное произведение двух векторов

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z,$$

хотя оно и построено из величин относительных.

Такие величины, не изменяющиеся при повороте координатной системы, мы будем называть инвариантами вращения.

Итак, величины  $x^2+y^2$ ,  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  являются инвариантами вращения.

Это значит, например, что уравнения вида  $x^2+y^2=L^2$ ,  $\vec{A} \cdot \vec{B}=C$  являются инвариантными, т. е. они выражают математическое соотношение между величинами, справедливое во всех координатных системах, повернутых друг относительно друга на разные углы.

Обратимся теперь к механике и подойдем с этой же точки зрения к принципу относительности Галилея.

Пусть  $k$  и  $k'$ —две системы отсчета, движущиеся друг относительно друга равномерно и прямолинейно. Совокупности таких систем отсчета принято называть галилеевыми системами.

Предположим, для простоты, что относительная скорость  $\vec{v}$  двух систем направлена по общей оси  $OX$ , а оси  $OY$  и  $OZ$  обеих систем параллельны друг другу (см. рис. 2). Найдем «словарь» для перехода от «языка» системы  $k$  к «языку» системы  $k'$ , т. е. формулы, связывающие координаты материальной точки  $N$  в системах  $k$  и  $k'$ .

Из чертежа непосредственно видно, что координаты  $y$  и  $y'$ ,  $z$  и  $z'$  попарно совпадают:  $y'=y$ ,  $z'=z$ .

Между координатами же  $x$  и  $x'$  существует соотношение  $x'=x-OO'$ . Если в начальный момент времени системы отсчета  $k$  и  $k'$  совпадали, то  $OO'$  есть путь, пройденный началом движущейся системы отсчета за время  $t$  и, следовательно,  $OO'=vt$  и  $x'=x-vt$ .

Кроме того, в классической механике считается само собой разумеющимся, что время одинаково течет во всех лабораториях.

Поэтому время одного и того же события, происшедшего с телом, одинаково в системах  $k$  и  $k'$ , т. е.  $t'=t$ .

Поэтому полная система уравнений, связывающая координаты пространственные и временную одного и того же события в системах  $k$  и  $k'$ , такова:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \quad (3.3)$$

или в векторной форме

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{r} - \vec{v} \cdot t \\ t' &= t.\end{aligned}$$

Эти уравнения составляют так называемую группу преобразований Галилея.

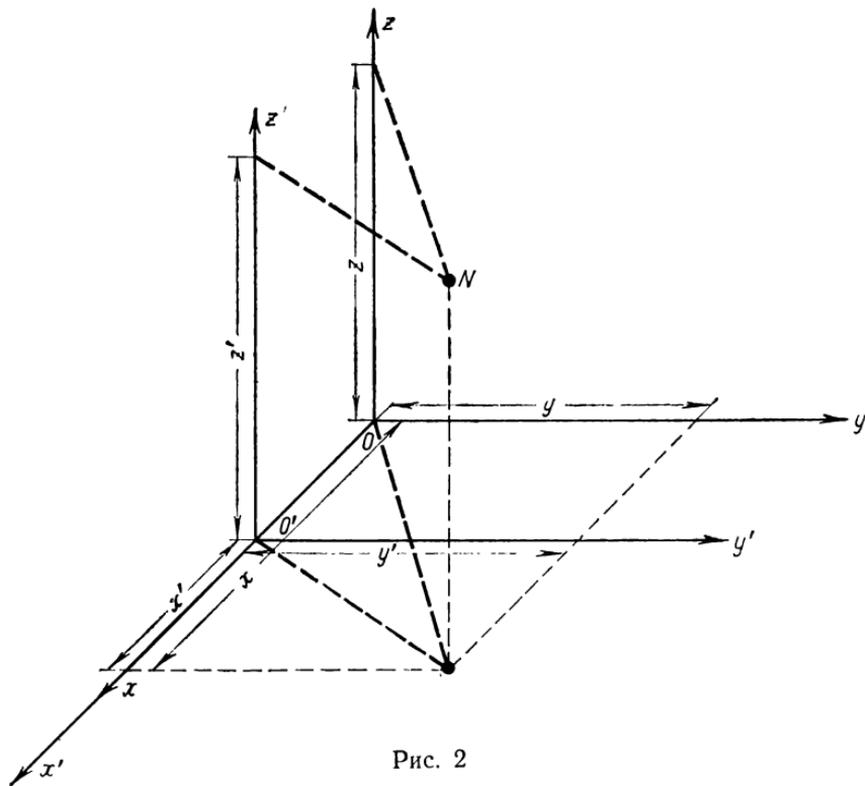


Рис. 2

Обратные преобразования мы можем получить, поменяв знак относительной скорости:

$$\begin{aligned}x &= x' + vt' \\ y &= y' \\ z &= z', \quad t = t'\end{aligned} \tag{4.3}$$

или в векторной форме

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}' + \vec{v} t' \\ t &= t'.\end{aligned}$$

Преобразования Галилея выражают математически тот отмеченный нами в § 2 факт, что координаты тела относительно, различны в разных системах отсчета. Однако легко видеть, что расстояние между двумя телами будет одинаково во всех галилеевых системах отсчета и является инвариантом преобразований Галилея.

Действительно, запишем уравнения (3.3) для двух событий 1 и 2.

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 - vt_1 & x'_2 &= x_2 - vt_2 \\y'_1 &= y_1 & y'_2 &= y_2 \\z'_1 &= z_1 & z'_2 &= z_2 \\t'_1 &= t_1 & t'_2 &= t_2.\end{aligned}\tag{4a.3}$$

Вычитая почленно из первых трех уравнений второй системы соответственные уравнения первой системы, получим:

$$\begin{aligned}x'_2 - x'_1 &= x_2 - x_1, \\y'_2 - y'_1 &= y_2 - y_1, \\z'_2 - z'_1 &= z_2 - z_1,\end{aligned}$$

откуда, вводя относительные расстояния тел

$$l'_{1,2} = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}$$

и

$$l_{1,2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

получим:

$$l'_{1,2} = l_{1,2}.\tag{5.3}$$

Такие величины, одинаковые во всех галилеевых системах отсчета, называются абсолютными или инвариантными.

Совершенно так же четвертые уравнения системы (4a.3) показывают, что промежуток времени между двумя событиями одинаков во всех галилеевых системах отсчета.

Действительно, если ввести  $\tau_{1,2} = t_2 - t_1$  и  $\tau'_{1,2} = t'_2 - t'_1$ , то из этих уравнений следует

$$\tau'_{1,2} = \tau_{1,2}.\tag{6.3}$$

Дифференцируя первые три формулы системы (4.3) по времени, получим

$$\begin{aligned}\frac{dx'}{dt} &= \frac{dx}{dt} - v \\ \frac{dy'}{dt} &= \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz'}{dt} &= \frac{dz}{dt}.\end{aligned}$$

Вводя скорость тела по отношению к системе  $k$   $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

и по отношению к системе  $k'$   $\vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$ , мы можем переписать эти соотношения в виде

$$\begin{aligned}u'_x &= u_x - v \\ u'_y &= u_y \\ u'_z &= u_z\end{aligned}\tag{7.3}$$

или в векторной форме

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}.\tag{7a.3}$$

Формулы (7.3), (7a.3) выражают так называемую теорему сложения скоростей в классической физике.

Мы видим, что скорость материальной точки различна в разных галилеевых системах отсчета.

Однако относительная скорость двух материальных точек одинакова во всех галилеевых системах отсчета, т. е. является инвариантом преобразований Галилея.

Действительно, напомним формулы преобразования скорости для двух тел:

$$\begin{aligned}\vec{u}'_1 &= \vec{u}_1 - \vec{v}; \\ \vec{u}'_2 &= \vec{u}_2 - \vec{v}.\end{aligned}$$

Так как относительная скорость второго тела по отношению к первому равна по определению векторной разности скоростей  $\vec{u}_2$  и  $\vec{u}_1$

$$\begin{aligned}\vec{u}_{1,2} &= \vec{u}_2 - \vec{u}_1, \\ \vec{u}'_{1,2} &= \vec{u}'_2 - \vec{u}'_1,\end{aligned}$$

то, вычитая почленно равенства, получим:

$$\vec{u}'_{1,2} = \vec{u}_{1,2}.\tag{8.3}$$

Наконец, нетрудно видеть, что ускорения материальных точек являются инвариантами преобразований Галилея.

Действительно, дифференцируя формулы (7.3) по времени с учетом того, что относительная скорость систем отсчета  $\vec{v}$  постоянна, получим:

$$\begin{aligned}\frac{du'_x}{dt} &= \frac{du_x}{dt} \\ \frac{du'_y}{dt} &= \frac{du_y}{dt} \\ \frac{du'_z}{dt} &= \frac{du_z}{dt}\end{aligned}\tag{9.3}$$

или в векторной форме

$$\frac{d\vec{u}'}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt}.\tag{9a.3}$$

Отдадим себе теперь ясный отчет, в чем должна заключаться математическая формулировка принципа относительности Галилея.

Принцип Галилея утверждает, что все механические явления протекают одинаково во всех галилеевых системах отсчета. Это значит, что законы, управляющие движением тела, должны оставаться в силе во всех галилеевых системах отсчета. Легко убедиться, что таким законом является II закон Ньютона

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F},\tag{10.3}$$

где  $\vec{F}$  — вектор силы, действующей на частицу,  $m$  — масса частицы.

Действительно, как известно из механики, зная силу, действующую на частицу, и так называемые начальные условия (начальные координаты и начальную скорость), в принципе можно, интегрируя уравнение (10.3), найти закон движения частицы  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  и ее траекторию.

Итак, принцип относительности Галилея эквивалентен следующему математическому утверждению: уравнения II закона Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея.

Мы видим, что принцип относительности по своему содержанию глубоко диалектичен. Наряду с утверждением относительности ряда величин и понятий (координаты, ско-

рости, траектории) он содержит не только утверждение об абсолютности (инвариантности) ряда других величин (расстояния между телами, промежутки времени между событиями, относительные скорости тел, ускорения), но и содержит нечто большее — утверждение об абсолютности (инвариантности) законов природы.

С этой точки зрения само название «принцип относительности» не является наиболее удачным, так как оно подчеркивает только одну, причем не самую важную сторону дела — относительность, и игнорирует другую сторону — абсолютность (инвариантность) законов механики.

Ввиду большой принципиальной важности этого вопроса, прежде чем переходить к доказательству инвариантности уравнения Ньютона, мы проиллюстрируем соотношение относительного и абсолютного на других примерах.

В языковых проблемах мы видели, что слова как своеобразные «координаты» объективных фактов относительны, ибо один и тот же объективный факт на разных языках выражается разными словами. Однако и здесь можно было бы сформулировать своеобразный «принцип относительности», который заключается в утверждении, что логическая согласованность фраз и их соответствие объективной действительности остаются верными в любой «системе отсчета» (на любом языке). Так, например, утверждение «Земля есть одна из звезд» абсурдно на любом языке, а утверждение «Все люди смертны» верно на любом языке. Эти утверждения «инвариантны» при смене языка, в то время как утверждение «Соль есть музыкальная нота и химическое соединение» верно только в русском языке, т. е. есть утверждение неинвариантное, незакономерное, случайное.

Можно было бы сформулировать аналогичный принцип в аналитической геометрии. Все соотношения между длинами отрезков и углами, очевидно, не зависят от выбора системы координат на плоскости.

Следовательно, все уравнения аналитической геометрии, выражающие эти соотношения, являются инвариантными по отношению к вращениям координатной системы. Например, теорема о сумме углов треугольника, теорема Пифагора и так далее выражаются инвариантными по отношению к вращению равенствами.

Теорема Пифагора, например, аналитически выражается равенством:  $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 =$

$=(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2$ , где  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$  — координаты вершин треугольника (рис. 3).

Нетрудно видеть, что и левая и правая части равенства — инварианты вращения.

Напротив, утверждения, выраженные уравнениями

$$2x+3y=6$$

$$\frac{x}{y}=4, \text{ и т. п.,}$$

есть утверждения неинвариантные, незакономерные, случайные, верные только в одной определенной системе координат.

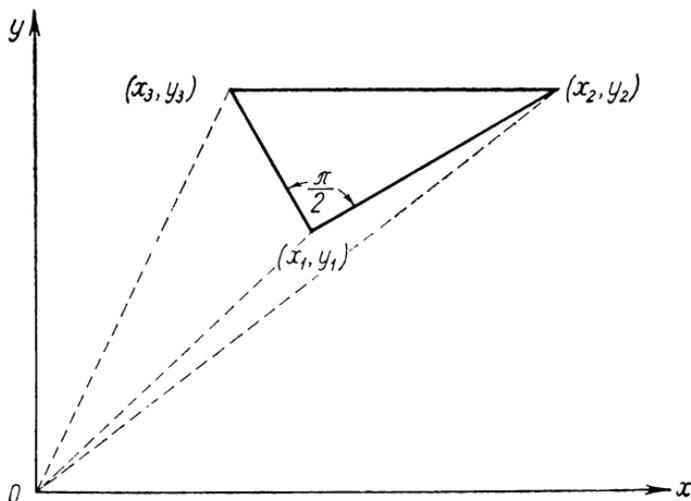


Рис. 3.

Докажем в заключение инвариантность уравнений Ньютона по отношению к преобразованиям Галилея.

В классической механике масса тела рассматривается как постоянная характеристика тела, не изменяющаяся при его движении, т. е. считается величиной инвариантной. Так как инвариантность ускорения мы доказали еще раньше, то тем самым ясна инвариантность левой части уравнений Ньютона.

Обращаясь к рассмотрению вектора силы  $\vec{F}$ , заметим, что в классической механике были известны силы трех видов: а) силы, зависящие от взаимных расстояний частиц (например, гравитационные силы:  $F=\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ ); б) силы,

зависящие от относительной скорости тела и среды (силы вязкого и сухого трения); в) силы, зависящие от времени (например, сила давления на поршень циклически работающего двигателя).

Но, как мы видели, и взаимные расстояния тел, и относительные скорости, и промежутки времени представляют собой инварианты преобразований Галилея.

Следовательно, и сила есть инвариант этих преобразований. Тем самым доказательство инвариантности уравнений Ньютона завершено, и мы получаем математическую формулировку принципа относительности Галилея.

#### § 4. Мысленный эксперимент Максвелла и опыт Майкельсона

Итак, мы видели, что никакие механические приборы не позволяют обнаружить равномерное и прямолинейное движение лаборатории относительно эфира.

Возникает, однако, вопрос, нельзя ли использовать для этой цели оптические приборы.

Если встать на ту точку зрения, что лаборатория вместе со всеми заключенными в ней приборами (линзы, зеркала, плоскопараллельные стеклянные пластины и т. д.) проходит сквозь эфир, не увлекая его, подобно тому, как ажурная клетка проходит сквозь воздух, то на этот вопрос следует дать положительный ответ.

Действительно, в этом случае эфир движется по отношению к лаборатории, движущаяся лаборатория обдувается «эфирным ветром», подобно тому, как движущаяся открытая автомашина обдувается обычным воздушным ветром. На одну из принципиальных возможностей обнаружения «эфирного ветра» указал еще в 1878 г. Максвелл.

Вообразим себе вагон длины  $2l$ , движущийся в направлении, указанном стрелкой, со скоростью  $\vec{v}$  (рис. 4). В середине вагона включается лампочка  $S$  и световые лучи освещают стенки вагона. Ясно, что свет достигает передней стенки вагона позже, чем задней, так как передняя стенка «убегает» от световых лучей, а задняя «догоняет» их. Если скорость света в эфире  $c$ , то скорость света по отношению к передней стенке  $c-v$ , а по отношению к задней стенке —  $c+v$ . Поэтому свет должен прийти к рассматриваемым стенкам вагона в разные моменты времени.

Запаздывание одного луча по сравнению с другим будет составлять

$$\Delta t = \frac{l}{c-v} - \frac{l}{c+v} = \frac{2lv}{c^2 - v^2}.$$

Учитывая, что  $v \ll c$ , мы получим окончательно

$$\Delta t \cong \frac{2lv}{c^2},$$

откуда

$$v = \frac{c^2 \Delta t}{2l}.$$

Итак, зная длину вагона, скорость света и измерив разность времен  $\Delta t$ , можно не только установить самый факт движения лаборатории по отношению к эфиру, но и найти скорость этого движения.

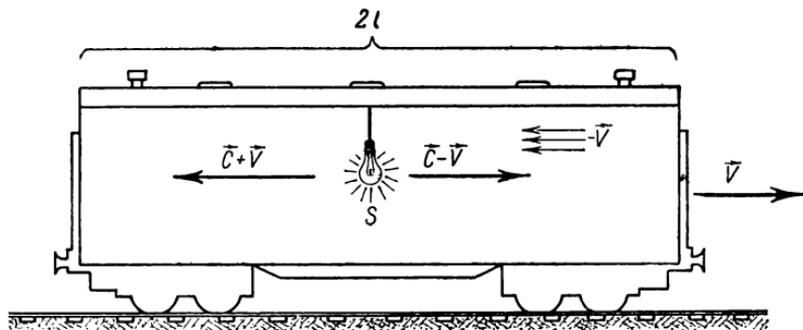


Рис. 4.

Эту скорость естественно было бы назвать абсолютной скоростью в отличие от множества относительных скоростей по отношению к произвольно движущимся галилеевым системам отсчета. Правда, непосредственное осуществление такого опыта невозможно, так как ничтожно малую разность времен  $\Delta t$  нельзя измерить никакими хронометрами. Например, при скорости  $v = 30 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$  (средняя скорость годового движения Земли) и длине лаборатории в несколько метров отставание  $\Delta t$  будет порядка  $10^{-11}$  сек.

Однако даже такие малые разности во времени распространения световых лучей приводят к значительным изменениям оптической разности хода  $c\Delta t$  и это позволяет на-

деяться с помощью интерференционных приборов обнаружить движение Земли по отношению к эфиру.

В 1881 г. развитие экспериментальной техники достигло такого уровня, что идею Максвелла удалось осуществить.

Опыт (в слегка измененном виде) был поставлен Майкельсоном и Морлеем и заключался в следующем (рис. 5).

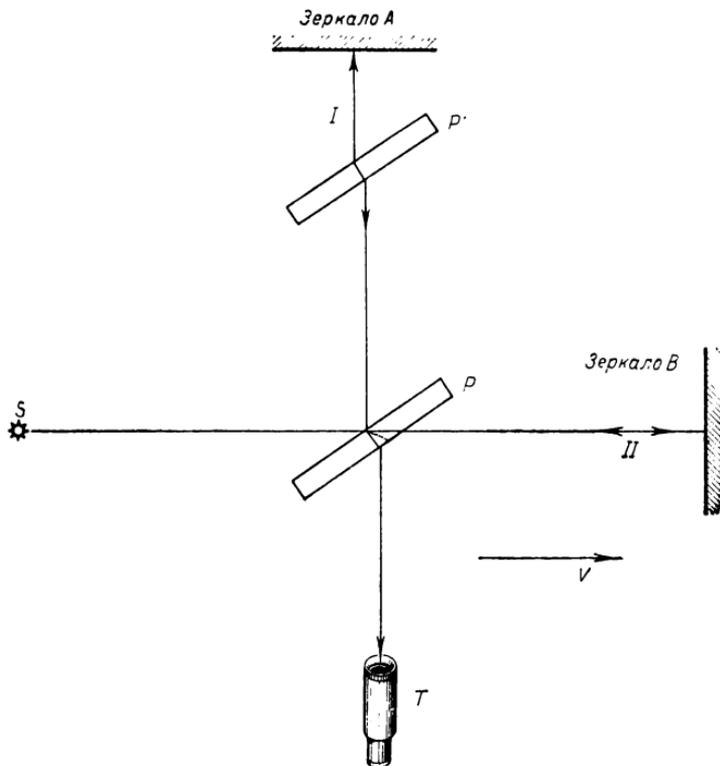


Рис. 5.

Луч света от источника  $S$  падает на плоскопараллельную пластину  $P$  с посеребренной гранью и частично отражается в направлении зеркала  $A$  (луч  $I$ ), а частично преломляется и проходит к зеркалу  $B$  (луч  $II$ ).

В дальнейшем луч  $I$  отражается от зеркала  $A$ , проходит через пластину  $P$  и попадает в зрительную трубу  $T$ , а луч  $II$  отражается от зеркала  $B$ , затем от посеребренной грани пластины  $P$  и также попадает в зрительную трубу,

где наблюдается интерференционная картина, возникающая в результате наложения этих двух лучей.

Так как луч I проходит через пластину P один раз, а луч II — три раза, на пути луча I помещается компенсирующая пластина P' той же толщины, что и P.

Пусть направление распространения луча II параллельно, а направление распространения луча I перпендикулярно направлению движения Земли.

Предположим, что скорость распространения света в неподвижном эфире равна  $c$ . Тогда на основании теоремы сложения скоростей скорость света по отношению ко всей установке, движущейся с Землей со скоростью  $\vec{v}$ , будет равна векторной сумме скоростей  $\vec{c}$  и  $-\vec{v}$  ( $-\vec{v}$  — скорость «эфирного ветра», обдувающего установку).

Для луча II на пути от пластины P к зеркалу B скорости  $\vec{c}$  и  $-\vec{v}$  направлены в противоположные стороны и суммарная скорость равна  $c-v$ . Когда же луч II, отразившись от зеркала B, возвращается к пластине P, его скорость совпадает по направлению со скоростью эфирного ветра и суммарная скорость равна  $c+v$ . Поэтому время  $t_2$ , которое он затрачивает на прохождение пути от пластины P до зеркала B и обратно, будет равно

$$t_2 = \frac{l_2}{c-v} + \frac{l_2}{c+v} = \frac{2l_2}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Несколько более сложным оказывается вычисление  $t_1$  для луча I.

Луч I, перпендикулярный к движению Земли, имеет по отношению к эфиру скорость  $\vec{c}$ , несколько отклоненную от перпендикуляра навстречу эфирному ветру (рис. 6), подобно тому, как пловец, желающий переплыть реку перпендикулярно к берегу, должен направить свою скорость наклонно навстречу течению. Поэтому скорость луча I по отношению к установке, как видно из рисунка, будет равна  $\sqrt{c^2 - v^2}$  и время  $t_1$ , которое он затратит на прохождение пути от пластины P к зеркалу A и обратно, будет равно

$$t_1 = \frac{2l_1}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l_1}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Разность времени хода лучей I и II равна

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2l_1}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{2l_2}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Установка Майкельсона и Морлея была смонтирована на массивной плите, плавающей в ртути, что позволяло произвести очень плавно, без толчков, ее поворот на  $90^\circ$ .

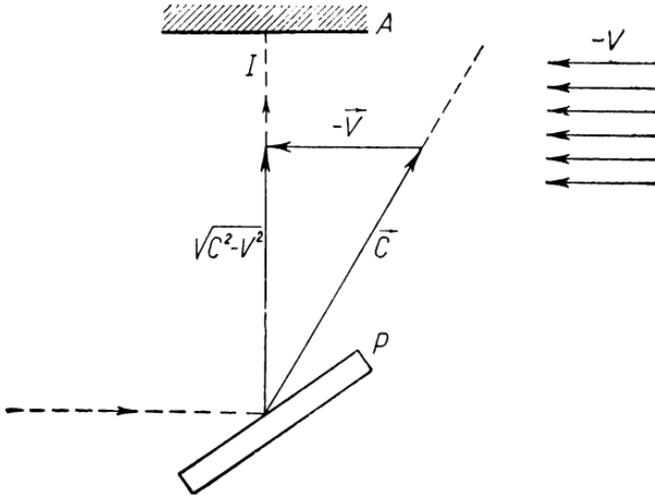


Рис. 6.

Тогда лучи I и II меняются местами (направление луча I будет параллельно, а луча II перпендикулярно «эфирному ветру») и разность времени хода лучей  $\Delta t'$  станет равной

$$\Delta t' = \frac{2l_1}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{2l_2}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Следовательно, при этом повороте произойдет изменение разности времени хода  $\delta t$ , равное

$$\delta t = \Delta t - \Delta t' = \frac{2(l_1 + l_2)}{c} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right],$$

что должно привести к смещению интерференционной картины.

Учитывая, что средняя скорость годовичного движения Земли равна приблизительно 30 км/сек и что, следовательно, отношение  $\frac{v^2}{c^2} \sim 10^{-8}$ , мы можем разложить величины, стоящие в скобках, в ряд Тейлора по степеням  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ :

$$(1 - \alpha)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \alpha + \dots; \quad (1 - \alpha)^{-1} = 1 + \alpha + \dots$$

и ограничиться двумя первыми членами разложения. Тогда легко получим

$$\delta t = \frac{l_1 + l_2}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2}.$$

В опытах Майкельсона и Морлея путем многократного отражения эффективные расстояния  $l_1$  и  $l_2$  были доведены до нескольких метров. Выбирая, например,  $l_1 + l_2 \sim 10$  м, получим

$$\delta t \sim 3 \cdot 10^{-16} \text{ сек.}$$

Отсюда отношение разности хода  $c\delta t$  к длине световой волны  $\lambda$  оказывается равным

$$\frac{c\delta t}{\lambda} \sim \frac{9 \cdot 10^{-6}}{\lambda},$$

что для средней части спектра ( $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-5}$  см) дает

$$\frac{c\delta t}{\lambda} \sim 0,2.$$

Итак, следовало ожидать, что при повороте установки Майкельсона и Морлея на  $90^\circ$  произойдет смещение интерференционной картины на расстояние, измеряемое десятными долями ширины интерференционной полосы.

Однако первый опыт Майкельсона и Морлея и неоднократно проведенные повторные опыты со все возрастающей точностью показали, что никакого сдвига интерференционной картины не происходит, т. е. «эфирный ветер» отсутствует.

Для объяснения отрицательного результата опыта Майкельсона был предложен ряд гипотез.

1) Эфир, заполняющий пространство между атомами движущегося тела, полностью увлекается этим телом, подобно тому, как воздух в герметически закрытой кабине самолета увлекается вместе с самолетом.

Отсюда вытекает, что эфир увлекается атмосферой Земли с такой же скоростью, с какой движется установка Майкельсона и Морлея и, следовательно, «эфирного ветра» не существует.

2) Движущиеся сквозь эфир тела сокращают свои продольные размеры (параллельные направлению движения) в таком отношении, что как раз компенсируется влияние эфирного ветра. Нетрудно выяснить, каково должно быть это сокращение. Если эта гипотеза справедлива, то при вычислении разности времени хода лучей в опыте Майкельсона надо до поворота установки (т. е. в выражении для  $\Delta t$ ) заменить путь второго луча  $l_2$  на сокращенный путь  $l'_2$ , а после поворота установки (в выражении для  $\Delta t'$ ) заменить путь первого луча  $l_1$  на сокращенный путь  $l'_1$

$$\Delta t = \frac{2l_1}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{2l'_2}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}};$$

$$\Delta t' = \frac{2l'_1}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{2l_2}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Тогда отсутствие сдвига интерференционной картины (компенсация «эфирного ветра») означает, что

$$\Delta t = \Delta t'$$

или

$$\frac{l_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l'_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{l'_1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{l_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

так как взаимосвязанными величинами в этом равенстве являются только  $l_1$  с  $l'_1$  и  $l_2$  с  $l'_2$ , то отсюда следует

$$\frac{l_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l'_1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \frac{l_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l'_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Следовательно, связь между сокращенной длиной  $l'$  и первоначальной  $l$  должна иметь вид

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Эта гипотеза, получившая название гипотезы сокращения, или контракционной гипотезы, была выдвинута Лорентцом и Фитцджеральдом и кажется на первый взгляд весьма искусственной и маловероятной.

Однако в электронной теории Лорентца она имела весьма глубокое обоснование — можно показать, что по теории Лорентца заряды на поверхности шарика, движущегося по отношению к эфиру со скоростью  $v$ , могут находиться в равновесии, только если этот шарик сплюсчивается в направлении движения в отношении  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , пре-  
вращаясь в сплюснутый эллипсоид вращения, Поэтому в теории Лорентца предполагается, что электроны движущегося тела сокращают продольные размеры в  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  раз, а тогда естественно допустить, что и продольные размеры самого тела уменьшаются в том же отношении.

3) Скорость света, испускаемого движущимся источником, векторно складывается со скоростью источника. Эта гипотеза была выдвинута Ритцем и получила название баллистической <sup>1</sup>.

Нетрудно убедиться в том, что баллистическая гипотеза Ритца объясняет отрицательный результат опыта Майкельсона. Действительно, приведенное на страницах 26—28 доказательство возникновения разности хода между лучами I и II в опыте Майкельсона и Морлея основано на предположении о том, что скорость света по отношению к установке  $\vec{c}'$  равна векторной разности скорости света по отношению к эфиру  $\vec{c}$  и скорости установки по отношению к эфиру  $\vec{v}$  (классическая теорема скоростей)

$$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}.$$

Но по гипотезе Ритца к скорости света в эфире надо векторно прибавить скорость источника света, который в опыте Майкельсона движется вместе со всей установкой (и вместе с Землей) со скоростью  $\vec{v}$ .

<sup>1</sup> Название «баллистическая гипотеза» связано с тем, что при выстреле движущегося орудия или ракеты скорость снаряда по отношению к Земле складывается векторно из скорости снаряда по отношению к орудию (ракете) и скорости по отношению к Земле.

Поэтому скорость света по классической теореме сложения скоростей будет равна

$$\vec{c}' = (\vec{c} + \vec{v}) - \vec{v} = \vec{c},$$

т. е. влияние эфирного ветра компенсируется прибавлением скорости источника света к скорости света в эфире.

Следовательно, согласно баллистической гипотезе лучи света в опыте Майкельсона достигают зеркал *A* и *B* за одинаковое время и никакого сдвига интерференционной картины при вращении установки происходить не должно.

Мы не исключаем возможность, что можно придумать и другие более или менее остроумные и правдоподобные объяснения отрицательного результата опыта Майкельсона. Поскольку, однако, целью этой книги является изложить единственно верное объяснение, предложенное А. Эйнштейном и легшее в основу теории относительности, не будем на этом этапе анализировать и опровергать первые две гипотезы (гипотезу полного увлечения эфира и гипотезу сокращения). Их несостоятельность будет выяснена в ходе дальнейшего изложения.

Следует особенно подчеркнуть, что сущность теории относительности вовсе не заключается в том, что она объясняет результат опыта Майкельсона (это с той или иной степенью убедительности делали и упомянутые гипотезы), а в том, что она предсказывает громадное количество новых физических фактов и явлений, вошедших в наши дни в арсенал современной техники (техники ядерных процессов).

Что же касается баллистической гипотезы, то поскольку, как это выяснится в следующем параграфе, она противоречит одному из основных положений теории относительности, мы приведем некоторые аргументы, которые заставляют ее отвергнуть.

Прежде всего заметим, что если рассматривать (как это делала физика XIX в.) свет как упругие волны в эфире, то баллистическая гипотеза является совершенно неприемлемой. Рассмотрим простые примеры, помогающие уяснить это обстоятельство.

Из воронки, движущейся в горизонтальном направлении, высыпаются камешки на поверхность воды (рис. 7).

Совершенно очевидно, что скорость волн, возникающих на поверхности воды, определяется только упругими свой-

ствами воды и ускорением силы тяжести, но совершенно не зависит от того, с какой скоростью перемещается источник волн (воронка).

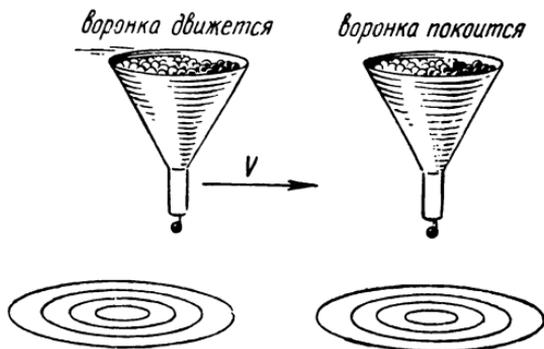


Рис. 7.

Аналогичное положение мы имеем и в акустике — скорость звуковых волн, исходящих от движущегося колокольчика, определяется упругими свойствами воздуха, но не зависит от движения колокольчика. Точно также и скорость световых волн должна определяться только упругими свойствами эфира и не должна зависеть от скорости источника света. По образному выражению Гельмгольца «волны, после того как они испущены, «забывают» о своем источнике».

Рассмотрим несостоятельность баллистической гипотезы подробнее. Имеется прямое указание на то, что зависимость скорости света от скорости источника света отсутствует. Это указание дают нам астрономические наблюдения за движением двойных звезд.

Пусть  $A$  и  $B$  (рис. 8) компоненты двойной звезды и пусть для простоты звезда  $B$  значительно меньше звезды  $A$  по массе, так что можно считать звезду  $A$  неподвижной, а звезду  $B$  движущейся вокруг нее по эллиптической траектории.

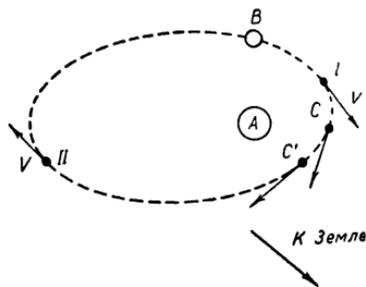


Рис. 8.

Если бы была верна баллистическая гипотеза, то скорость света, идущего от звезды  $B$  к Земле, должна была бы меняться в пределах от  $c+v$  в точке I до  $c-v$  в точке II, пробегая все промежуточные значения. Легко видеть при этом, что скорость света, идущего от точки  $C$  к Земле, больше, чем для точки  $C'$ , но и расстояние от точки  $C$  до Земли больше, чем от  $C'$ . Поэтому должны были бы найтись такие точки на орбите звезды  $B$ , из которых свет приходил бы на Землю одновременно.

Следовательно, фотографируя движение звезды  $B$ , мы на фотопластинке вместо светящейся точки должны были бы получить светящуюся дугу.

Однако наблюдения показывают, что для всех двойных звезд подобные искажения не наблюдаются и, следовательно, зависимость скорости света от скорости источника света отсутствует.

Наконец, следует отметить, что если в опыте Майкельсона использовать свет не от земного источника, а, например, свет какой-нибудь звезды (или Солнца), то поскольку этот источник не участвует в движении лаборатории, то влияние «эфирного ветра», обдувающего Землю, ничем не компенсируется и сдвиг интерференционной картины должен обнаружиться. Однако когда подобный опыт был поставлен чешским физиком Томашеком, то результат оказался тем же, что и у Майкельсона. Это лишний раз показывает, что баллистическая гипотеза несостоятельна.

Итак, совокупность опытов убедительно указывает на то, что скорость света не зависит от движения источника света.

---

## ГЛАВА II

# КИНЕМАТИКА ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

### § 5. Постулаты Эйнштейна

В отличие от всех предыдущих исследователей Эйнштейн усмотрел в отрицательном результате опыта Майкельсона не случайную трудность, которая нуждается в том или ином (столь же случайном) объяснении, а проявление некоторого общего закона природы, что невозможно обнаружить прямолинейное и равномерное движение лаборатории по отношению к эфиру (к абсолютному пространству) не только механическими, но и оптическими методами.

Обобщая этот результат, он выдвигает гипотезу, которая является расширением принципа относительности Галилея и носит название принципа относительности Эйнштейна.

Никакие физические опыты (механические, оптические, тепловые, электромагнитные и т. д.), производимые внутри лаборатории, не позволяют установить, находится ли она в абсолютном равномерном и прямолинейном движении или нет.

Так же как и принцип Галилея, принцип относительности Эйнштейна допускает и утвердительную формулировку.

Все физические явления протекают одинаково (при одинаковых условиях) в двух лабораториях, движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно.

В настоящее время принцип относительности Эйнштейна является в такой же степени достоверным научным фактом, как и утверждение об атомистической структуре вещества или закон сохранения энергии.

В силу этого любая идея создания физического прибора (оптического, механического и т. п.), обнаруживающего абсолютное движение лаборатории, должна быть столь же безоговорочно отвергнута, как и идея любого вечного двигателя.

Ясно, что принцип относительности делает совершенно надуманной и беспредметной гипотезу абсолютного пространства, — если во всех лабораториях, движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, все физические явления протекают одинаково, то любую из них с одинаковым правом можно считать абсолютно покоящейся. Одновременно оказываются излишними и не соответствующими природе вещей понятия абсолютного покоя и абсолютного движения. Всякое движение относительно и имеет смысл говорить лишь о движении одних тел по отношению к другим телам.

Более того, и гипотеза эфира, как непрерывной упругой среды, оказывается внутренне противоречивой. Действительно, если справедлив принцип относительности Эйнштейна и физические явления протекают одинаково во всех лабораториях, движущихся друг по отношению к другу равномерно и прямолинейно, то ни в одной из этих лабораторий не должен проявляться «эфирный ветер». Это значит, что эфир должен находиться в покое по отношению к любой из этих лабораторий, что явно абсурдно. Итак, принцип относительности Эйнштейна развенчал одну из наиболее естественных гипотез, выдвинутых классической физикой, — гипотезу о существовании эфира.

Заметим, что поскольку принцип относительности Эйнштейна изгоняет из физики ту гипотетическую упругую среду, в которой согласно волновой теории происходит распространение электромагнитных (в частности, световых) волн, то перед физиками вновь со всей остротой встал, казалось бы, уже окончательно решенный вопрос о природе света. Забегая несколько вперед, укажем уже здесь, что ответ на этот вопрос был дан в значительной степени самим Эйнштейном, который в том же 1905 г. создал основы квантовой теории света (см. § 13, гл. III).

Если бы содержание теории относительности исчерпыва-

лось одним постулатом — принципом относительности Эйнштейна, то она имела бы большое философское и познавательное значение, но отнюдь не представляла бы собой физическую теорию, предсказывающую огромное количество новых фактов и имеющую колоссальное поле действия в современной атомной и ядерной физике.

Принцип относительности вырастает в плодотворную физическую теорию, если его дополнить вторым постулатом Эйнштейна.

Скорость света в вакууме одинакова во всех направлениях и не зависит от движения источника света.

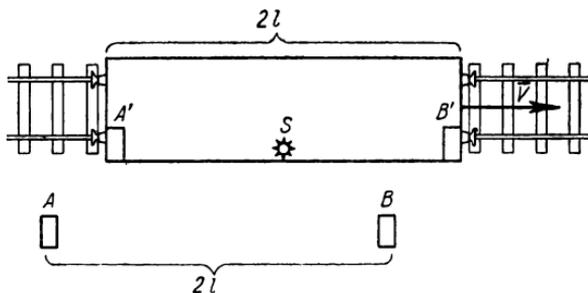


Рис. 9.

Как мы уже говорили в предыдущем параграфе в связи с критикой баллистической гипотезы Ритца, это положение с точки зрения концепции эфира кажется совершенно естественным. Однако гипотеза эфира зачеркивается первым постулатом Эйнштейна, — принимая принцип относительности, мы тем самым отказываемся рассматривать свет как волновое движение несуществующего эфира. Поэтому второй постулат Эйнштейна мы должны рассматривать как экспериментально установленный факт (наблюдения над двойными звездами, опыт Томашека).

Положение, однако, серьезно осложняется тем, что с точки зрения классической физики первый и второй постулаты Эйнштейна находятся в противоречии друг с другом.

В самом деле, обратимся к несколько видоизмененному мысленному эксперименту Максвелла и представим себе, что стенки движущегося вагона прозрачны (например, сделаны из стекла, рис. 9). Тогда свет, излученный лампочкой  $S$ , будет освещать два фотоэлемента  $A'$  и  $B'$ , закреплен-

ные на передней и задней стенках вагона, и фотоэлементы  $A$  и  $B$ , закрепленные на таком же расстоянии друг от друга на столбах вдоль колеи.

Пусть в момент вспышки лампочки фотоэлементы  $A'$  и  $A$ ,  $B'$  и  $B$  попарно совпадали. Если лампочка  $S$  находится точно на середине вагона, то световые волны дойдут до фотоэлементов  $A$  и  $B$  одновременно за время  $\tau$ , равное  $\frac{l}{c}$ .

Согласно первому постулату Эйнштейна в системе отсчета, связанной с неподвижными фотоэлементами, распространение света должно происходить так же, как и в движущейся системе, при одинаковых условиях. Однако по второму постулату Эйнштейна условия в обеих системах действительно одинаковы, так как движение лампочки  $S$  не сказывается на скорости распространения света. Следовательно, с таким же правом мы должны делать вывод, что фотоэлементы  $A'$  и  $B'$  будут освещены одновременно.

С точки зрения классической физики, с точки зрения «здорового смысла» нашей обыденной жизни, это казалось совершенно абсурдным — световая волна не может одновременно достигать точек  $A'$  и  $B'$  и в то же самое время точек  $A$  и  $B$ .

Действительно, согласно гипотезе неподвижного эфира световые волны, распространяясь в эфире, должны одновременно достигать фотоэлементов  $A$  и  $B$ , но неодновременно точек  $A'$  и  $B'$ .

Заметим, что если бы речь шла не о распространении света, а, например, о движении двух револьверных пуль, выброшенных в противоположные стороны, то никакого парадокса не возникало бы. Пули достигали бы стенок движущегося вагона одновременно, фотоэлементов  $A$  и  $B$  неодновременно, так как к скорости одной пули надо было бы прибавить, а от скорости другой пули отнять скорость револьвера (для движения пули не имеет место второй постулат Эйнштейна). Это и побудило Ритца выдвинуть баллистическую гипотезу.

Согласно же постулатам Эйнштейна точек  $A$  и  $B$  и точек  $A'$  и  $B'$  свет должен достигать одновременно.

Для устранения парадокса Эйнштейн выдвигает решающее для построения всего здания теории относительности утверждение: возникающее кажущееся противоречие указывает на то, что собы-

тия, одновременные в одной системе отсчета, не являются одновременными в другой системе отсчета, т. е. одновременность является понятием относительным.

В самом деле, поскольку опыт однозначно указывает на то, что скорость света одинакова во всех направлениях, то одновременными событиями следует считать приход светового сигнала во все точки сферы с центром в точке, откуда был испущен сигнал. Но так как скорость света одинакова во всех системах отсчета, то в двух движущихся друг относительно друга системах фронтом волны будут разные сферы.

Итак, из постулатов Эйнштейна следует, что в разных системах отсчета время течет по-разному. Поэтому молчаливое допущение классической физики об абсолютном времени оказывается столь же несостоятельным, как и гипотеза об абсолютном пространстве.

## § 6. Преобразования Лорентца

В § 3 мы нашли, что при описании механических явлений словами для перехода от «языка» системы  $k$  к «языку» системы  $k'$  являются формулы преобразований Галилея

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t.$$

Нетрудно, однако, видеть, что для описания оптических явлений этот «словарь» непригоден.

Это видно уже из того, что по классической теореме сложения скоростей

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$$

скорость света должна быть различной в различных системах отсчета:

$$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v},$$

что противоречит второму постулату Эйнштейна.

Это заставляет нас для описания оптических явлений искать новый «словарь» для перехода от «языка» системы  $k$  к «языку» системы  $k'$ .

Как и при выводе преобразований Галилея, рассмотрим две системы отсчета, движущиеся друг относительно друга равномерно и прямолинейно со скоростью  $\vec{v}$ , направленной вдоль оси  $OX$ .

Пусть в начальный момент времени (когда обе системы отсчета пространственно совпадали) из начала координат испущен световой сигнал. Рассмотрим распространение фронта волны в системе  $k$  и системе  $k'$ .

В системе  $k$  геометрическим местом точек одновременного прихода света будет сфера с радиусом  $ct$ , уравнение которой

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (1.6)$$

По принципу относительности в системе  $k'$  фронтом волны тоже должна быть сфера, причем по второму постулату ее радиус должен быть равен  $ct'$ .

Следовательно, в системе  $k'$  уравнение фронта волны должно иметь вид

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (2.6)$$

Уравнения (1.6) и (2.6) особенно отчетливо показывают, что время  $t'$  в системе  $k'$  должно отличаться от времени системы  $k$ . В самом деле, если бы мы положили, что  $t' = t$ , то получили бы

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

т. е. одна и та же сфера (фронт волны в момент времени  $t' = t$ ) должна иметь два различных центра (начало координат системы  $k$  и начало координат системы  $k'$ ), что абсурдно.

Заметим, что в классической физике это противоречие не возникает благодаря тому, что хотя время считается абсолютным ( $t' = t$ ), но скорость света в системе  $k'$  не равна  $c$ .

По классической теореме сложения скоростей:  $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}$  или  $c'^2 = c^2 + v^2 - 2cv \cos \alpha$  (рис. 10), причем для точек фронта волны

$$c \cos \alpha - v = \frac{x'}{t}$$

и, следовательно,

$$c'^2 = c^2 + v^2 - 2v \left( v + \frac{x'}{t} \right) = c^2 - v^2 - \frac{2vx'}{t}.$$

Поскольку в системе  $k'$  уравнение фронта волны будет иметь вид

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c'^2 t^2 = 0,$$

можно записать

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - \left( c^2 - v^2 - \frac{2vx'}{t} \right) t^2 = 0$$

или

$$(x' + vt)^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t^2 = 0.$$

Это есть уравнение сферы с центром в точке  $x' = -vt$  (начало координат системы  $k$ ), и, следовательно, мы имеем один фронт волны и в системе  $k$ , и в системе  $k'$  с центром

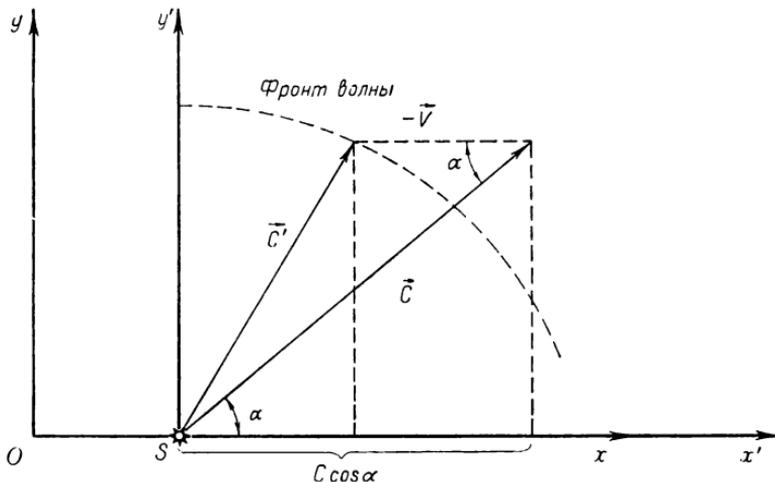


Рис. 10.

в точке  $O$ , что согласуется с преобразованиями Галилея

$$x' + vt = x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Итак, мы видим, что если пользоваться преобразованиями Галилея, то скорость света нельзя считать абсолютной, если же считать, что скорость света одинакова во всех системах отсчета (второй постулат Эйнштейна), то следует считать относительным время и, следовательно, надо отказаться от преобразований Галилея.

Мы видим, что левая часть уравнений (1.6) и (2.6) имеет одинаковый вид, т. е. выражение  $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$  должно быть инвариантным.

Так как мы предполагаем, что относительное движение систем происходит вдоль оси  $OX$ , а оси  $OY$  и  $OZ$  обеих систем остаются параллельными друг другу, то естественно положить, что  $y' = y, \quad z' = z$ .

Тогда задача сводится к тому, чтобы найти все преобразования, которые оставляют инвариантной разность двух квадратов  $x^2 - c^2 t^2$ .

Но эта задача с помощью постановки  $u = ict$  может быть немедленно сведена к уже рассмотренной задаче о вращении системы координат на плоскости. Выражение  $x^2 - c^2 t^2$  принимает вид  $x^2 + u^2$  и преобразования, оставляющие инвариантной сумму квадратов (см. § 3), имеют вид

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + u \sin \varphi \\ u' &= u \cos \varphi - x \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для того чтобы найти параметр  $\varphi$ , заметим, что начало новой системы отсчета ( $x' = 0$ ) должно двигаться по отношению к старой системе отсчета со скоростью  $v$ , т. е. при  $x' = 0$  мы должны иметь  $x = vt = \frac{v}{ic} u$ . Подставляя это в первое уравнение (3.6), получим

$$\operatorname{tg} \varphi = i \frac{v}{c}.$$

Отсюда по известным формулам тригонометрии

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}; \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

имеем

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \sin \varphi = i \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

и, следовательно, преобразования (3.6) принимают вид

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x + i \frac{v}{c} u}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ u' &= \frac{u - i \frac{v}{c} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Напомним, что тригонометрические функции в комплексной плоскости определяются через ряды Тэйлора  $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$ ;  $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$ . Отсюда видно, что при мнимом  $z$  функции  $\sin z$  и  $\operatorname{tg} z$  имеют чисто мнимые, а  $\cos z$  — вещественные значения.

Возвращаясь теперь от  $u$  к переменной  $t$ , окончательно будем иметь

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Таким образом, полная система уравнений, связывающих координаты события в системе  $k$  и в системе  $k'$  («словарь» для перехода от «языка» системы  $k$  к «языку» системы  $k'$ ), имеет вид

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\left( \beta = \frac{v}{c} \right).$$
(4.6)

Очевидно, обратные преобразования от системы  $k'$  к системе  $k$  можно получить, изменив знак относительной скорости,

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$
(5.6)

Преобразования (4.6), (5.6) носят название преобразований Лорентца по имени голландского физика Г. А. Лорентца<sup>1</sup>.

Обратим внимание на то, что формулы преобразований Лорентца теряют смысл при  $v > c$  (так как подкоренные

<sup>1</sup> Следует сказать, что Лорентц, получивший формулы (4.6), (5.6) раньше Эйнштейна, не считал  $t'$  истинным физическим временем системы  $k'$ , а рассматривал его как некую вспомогательную величину, имеющую чисто формальный смысл.

выражения в формулах (4.6) и (5.6) оказываются отрицательными). Это указывает на то, что скорость света в теории относительности является предельной скоростью для всех систем отсчета. Нетрудно видеть, что в другом предельном случае — случае малых скоростей  $v \ll c$  (или формально при  $c \rightarrow \infty$ ) — формулы преобразований Лорентца переходят в формулы преобразований Галилея

$$\begin{aligned}x' &= x - vt \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t.\end{aligned}$$

Итак, при описании одного и того же оптического явления, например распространения света, на «языке» системы  $k$  и системы  $k'$  «словарем» для перевода с одного языка на другой согласно теории относительности служат формулы Лорентца, в то время как при описании механических явлений таким словарем согласно законам классической механики являются преобразования Галилея.

Так как координаты и время явно не могут преобразовываться по двум различным законам в зависимости от того, имеем ли мы дело с координатами светового зайчика или с координатами материальной точки, то из двух «словарей» правильным может быть только один.

В теории относительности правильным принимается «словарь» преобразований Лорентца, а преобразования Галилея считаются лишь приближенно верными при малых скоростях ( $v \ll c$ ).

Заметим, забегая вперед, что этот выбор вынуждает нас отказаться и от уравнений классической динамики (второй закон Ньютона), так как они инвариантны только по отношению к преобразованиям Галилея и, следовательно, неинвариантны по отношению к преобразованиям Лорентца.

Перейдем теперь к рассмотрению следствий из преобразований Лорентца.

## § 7. Теорема сложения скоростей Эйнштейна

Мы видели, что классическая теорема сложения скоростей, согласно которой система

$$\begin{aligned}u'_x &= u_x - v \\u'_y &= u_y \\u'_z &= u_z\end{aligned}$$

или в векторной форме

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v},$$

является непосредственным выводом из преобразований Галилея. Следует поэтому ожидать, что в теории относительности теорема сложения скоростей будет выглядеть иначе.

Будем исходить из формул преобразований Лоренца

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Дифференцируя правую и левую части написанных формул, мы получим:

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \\ dt' &= \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Деля почленно левые и правые части первых трех равенств на левую и правую части четвертого равенства, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt'} &= \frac{dx - vdt}{dt - \frac{v}{c^2}dx} \\ \frac{dy'}{dt'} &= \frac{dy \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{dt - \frac{v}{c^2}dx} \\ \frac{dz'}{dt'} &= \frac{dz \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{dt - \frac{v}{c^2}dx}. \end{aligned}$$

Вводя теперь скорости тела в системе  $k$ :  $u_x = \frac{dx}{dt}$ ,  $u_y = \frac{dy}{dt}$ ,  $u_z = \frac{dz}{dt}$ , и в системе  $k'$ :  $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$ ,  $u'_y = \frac{dy'}{dt'}$ ,  $u'_z = \frac{dz'}{dt'}$ , мы получим эйнштейновскую теорему сложения скоростей

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \\ u'_y &= \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \\ u'_z &= \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для абсолютной величины скоростей  $u'^2 = u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2$  и  $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$  получим, вводя угол  $\alpha$  между скоростью  $\vec{u}$  и направлением оси  $OX$ ,

$$u'^2 = \frac{u^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \alpha) - 2uv \cos \alpha + v^2}{\left(1 - \beta \frac{u}{c} \cos \alpha\right)^2}. \quad (2.7)$$

В частном случае, когда скорость  $\vec{u}$  тоже направлена вдоль оси  $OX$ , формула сложения скоростей принимает простой вид

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}. \quad (3.7)$$

Легко видеть, что для малых скоростей  $u \ll c$  и  $v \ll c$  эти формулы приближенно переходят в классические формулы (7.3), так что классическая механика Ньютона есть механика движений с малыми (по сравнению с  $c$ ) скоростями.

Заметим сразу же, что релятивистская теорема сложения скоростей показывает нам, в чем заключалась ошибка в рассуждениях Максвелла (а следовательно, и в попытках понять отрицательный результат опыта Майкельсона).

Рассматривая опыт с распространением света в движущемся вагоне, мы считали скорость света в вагоне равной  $c+v$  или  $c-v$ , в зависимости от направления распространения, т. е.

незаконно пользовались классической теоремой сложения скоростей.

Посмотрим, что дают формулы Эйнштейна в том случае, если хотя бы одна из складываемых скоростей ( $u$  или  $v$ ) равна скорости света в вакууме  $c$ .

Подставляя в формулы (2.7) или (3.7)  $u=c$  или  $v=c$ , нетрудно проверить, что

$$u' = c.$$

Итак, эйнштейновская теорема сложения скоростей приводит нас к выводу, что величина скорости распространения света в вакууме абсолютна, одинакова во всех системах отсчета. Совершенно ясно, что мы и не могли прийти к иному результату, так как мы исходили из постулатов Эйнштейна, а второй из них и утверждает абсолютность скорости света в вакууме.

Заметим, что если обе складываемые скорости меньше  $c$ , то и суммарная скорость по формулам Эйнштейна тоже оказывается меньше  $c$ .

Действительно, пусть  $u=c(1-\alpha)$ ,  $v=-c(1-\beta)$ , где  $0 < \alpha < 1$  и  $0 < \beta < 1$ . Тогда классическая теорема скоростей дала бы (мы считаем, что скорость тела  $u$  направлена вдоль оси  $OX$ ) для скорости тела в системе  $k'$

$$u' = u - v = c(2 - \alpha - \beta) > c \quad (\text{при } \alpha + \beta < 1).$$

Теорема же Эйнштейна приводит нас к иному результату

$$u' = c \frac{2 - \alpha - \beta}{2 - \alpha - \beta + \alpha\beta} < c.$$

Это еще раз указывает на предельный характер скорости света в вакууме.

Следует отметить, что инвариантной по отношению к преобразованиям Лорентца является только абсолютная величина скорости света в вакууме  $c$ , но не ее направление.

Рассмотрим сначала следующий полезный пример.

В неподвижной системе отсчета отвесно каплют дождевые капли. Нетрудно найти, что проекции скорости капель в неподвижной системе отсчета (рис. 11) будут равны:

$$u_x = 0; \quad u_y = -u; \quad u_z = 0.$$

В системе  $k'$ , связанной с вагоном, движущимся вдоль оси  $OX$  со скоростью  $v$ , проекции скорости капель

оказываются равными

$$u'_x = -v; \quad u'_y = -u \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \quad u'_z = 0.$$

Следовательно, угол  $\alpha$ , который составляет с вертикалью траектории капель на стекле вагона, определяется равенством

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u'_x}{u'_y} = \frac{v}{u \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

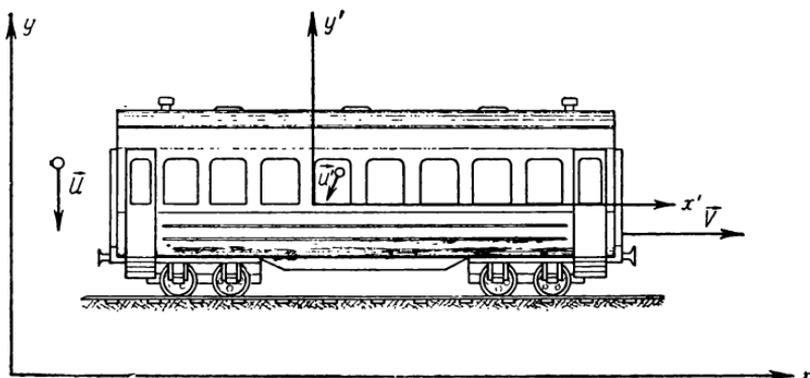


Рис. 11.

Заметим, что с точки зрения классической механики мы бы имели

$$u'_x = -v, \quad u'_y = -u, \quad u'_z = 0,$$

и для угла отклонения траектории капель от вертикали получили бы

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{u},$$

т. е. результат, отличающийся от релятивистского членами второго порядка малости по отношению к параметру  $\frac{v}{c}$ .

Если теперь от задачи о движении водяных капель мы перейдем к задаче о направлении световых лучей в движущейся системе отсчета, то, подставляя в предыдущие формулы  $u=c$ , мы для угла отклонения светового луча получим выражение

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.7)$$

или в приближении механики Ньютона

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{v}{c}. \quad (5.7)$$

Эти формулы дают теорию так называемого явления аберрации звезд.

В XVIII в. английский астроном Брадлей обнаружил, что все «неподвижные» звезды в течение года описывают на небесной сфере эллипсы, большие полуоси которых одинаковы и составляют  $20,5''$ , что прекрасно согласуется с формулами (4.7) и (5.7), если туда подставить среднюю скорость годового движения Земли  $30 \text{ км/сек}$ .

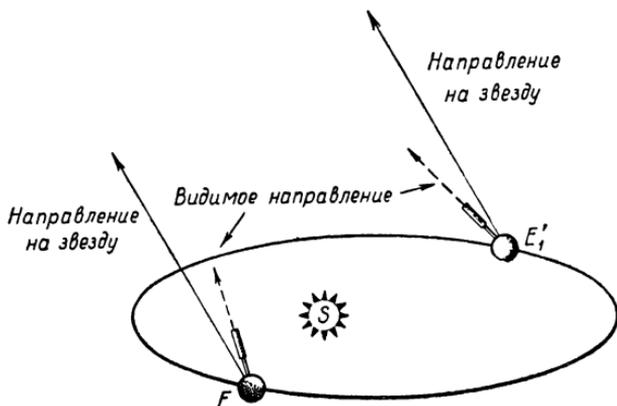


Рис. 12а.

До создания теории относительности считалось, что явление аберрации подтверждает гипотезу неподвижного эфира.

Действительно, классическую формулу (5.7) для угла аберрации можно вывести, считая, что эфирный ветер, обдувающий Землю при ее движении вокруг Солнца, «сносит» световые волны в направлении, противоположном движению Земли, благодаря чему изображение звезды в телескопе смещается (рис. 12а и 12б) как раз на угол, определяемый формулой (5.7).

В теории относительности глубокое объяснение явления аберрации заключается в том, что фронт волны, как место одновременного прихода световых колебаний, представляет собой понятие относительное и поэтому при переходе к сис-

теме, движущейся с Землей, он поворачивается на угол, определяемый формулой (4.7).

Итак, мы убедились в том, что скорость света в вакууме  $c$  является абсолютной величиной.

Это, однако, не относится к величине скорости света в среде. Как известно, скорость света в среде меньше, чем

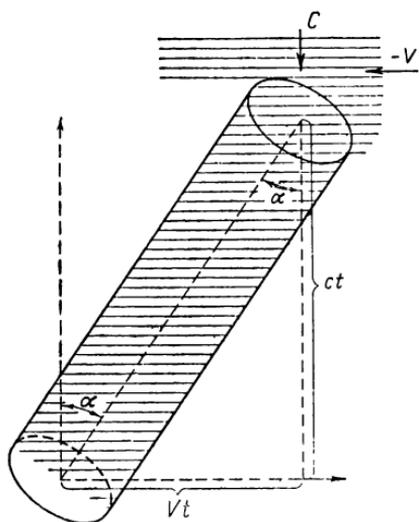


Рис. 126.

в вакууме, и равна  $c' = \frac{c}{n}$ , где  $n$  — показатель преломления среды.

Рассмотрим следующий эксперимент (опыт Физо 1851 г.).

Луч света от источника  $S$  (рис. 13) падает на пластину  $P$  с посеребренной гранью и частично проходит через нее, а частично отражается. В результате этого образуется два световых пучка, один из которых проходит путь от пластины  $P$  до зеркала 1, затем, отразившись от него, идет к зеркалу 2, отразившись от зеркала 2, идет к

зеркалу 3 и, отразившись от него, падает вновь на пластину  $P$ , проходит через нее и попадает на экран. Другой же луч проходит тот же путь, но в противоположном направлении: пластина  $P$ , зеркало 3, зеркало 2, зеркало 1, и, отразившись от посеребренной грани пластины  $P$ , попадает на тот же экран. На экране будет наблюдаться интерференционная картина, возникающая при наложении этих когерентных волн. На пути обоих лучей помещается система труб, заполненная водой, которую с помощью насосов можно заставить циркулировать со скоростью  $v$ . Когда вода приходит в движение, на экране наблюдается сдвиг интерференционной картины.

С точки зрения теоремы скоростей Эйнштейна эффект можно легко объяснить и подсчитать.

В системе отсчета, связанной с движущейся водой, скорость света равна  $\pm \frac{c}{n}$  (в зависимости от направления рас-

пространения). В системе же отсчета, связанной с установкой, по теореме сложения скоростей скорость фронта волны будет равна

$$c' = \frac{\pm \frac{c}{n} + v}{1 \pm \frac{v}{cn}}.$$

Так как дробь  $\frac{v}{cn}$  очень мала по сравнению с 1, то приближенно, пользуясь формулой  $\frac{1}{1+\alpha} \approx 1-\alpha$  ( $\alpha$ —малая величина), получим

$$c' = \left(v \pm \frac{c}{n}\right) \left(1 \mp \frac{v}{cn}\right) = \pm \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \quad (6.7)$$

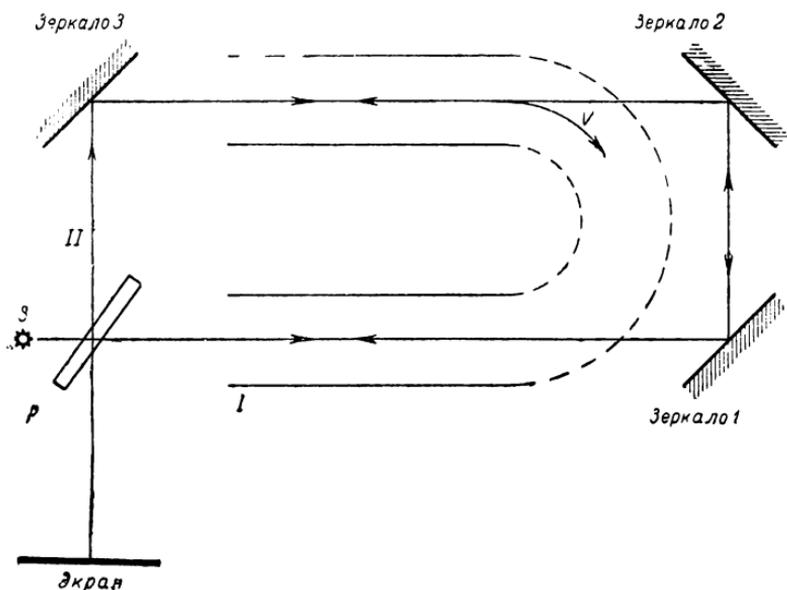


Рис. 13.

Поэтому абсолютная величина скорости для двух лучей в опыте Физо оказывается равной

$$c_1 = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$$

$$c_2 = \frac{c}{n} - v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Это приводит к возникновению разности времени хода лучей, равной

$$\Delta t = \frac{l}{c_2} - \frac{l}{c_1},$$

откуда нетрудно подсчитать и смещение интерференционной картины.

Как и следует ожидать, результаты измерений Физо находятся в прекрасном согласии с формулой (6.7).

До создания теории относительности этот результат рассматривался как подтверждение выдвинутой еще Френелем гипотезы частичного увлечения эфира.

Гипотеза эта заключалась в следующем: движущаяся вода увлекает заключенный в ней эфир не полностью, а частично, так что эфир отстает от движения воды. Некоторые соображения приводили Френеля к выводу, что если скорость движущейся воды  $v$ , то скорость эфира должна быть равна  $kv$ , причем так называемый коэффициент увлечения  $k$  по теории Френеля оказывался равным  $1 - \frac{1}{n^2}$ . Тогда классическая теорема скоростей дает для скорости света по отношению к установке значение

$$c' = \pm \frac{c}{n} + v \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right),$$

что совпадает с формулой (6.7) и прекрасно подтверждается экспериментом.

Следует, однако, отдать себе отчет в том, что, несмотря на формальное совпадение конечных результатов, по существу мы имеем здесь дело с принципиально различными решениями проблемы.

В решении Френеля мы имеем частично увлекаемый эфир и пользуемся классической теоремой скоростей.

В теории относительности эфир вообще отсутствует, но зато скорости складываются по формулам Эйнштейна.

## § 8. Сокращение длин и замедление хода движущихся часов

В § 3 показано, что при преобразованиях Галилея расстояния между точками или длина стержней не изменяются, т. е. утверждение, что линейка имеет длину в 1 м, имеет

смысл без указания, где находится эта линейка: в движущемся вагоне или покоится на станции.

Повторим теперь те же выкладки, которые привели нас к этому выводу, но с помощью формул преобразований Лорентца.

Пусть в системе  $k$  покоится стержень длины  $l_0$ , расположенный вдоль оси  $OX$ ;  $x_2 - x_1 = l_0$ .

Для того чтобы измерить его длину в системе  $k'$ , движущейся по отношению к системе  $k$  со скоростью  $v$ , мы должны найти разность координат его правого и левого конца  $l = x_2' - x_1'$  в один и тот же момент времени по часам системы  $k'$ .

Запишем преобразования Лорентца для координат концов стержня

$$x_1 = \frac{x_1' + vt_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$x_2 = \frac{x_2' + vt_2'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Вычитая из второго равенства первое и учитывая, что  $t_1' = t_2'$ , получим:

$$x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

или

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.8)$$

Итак, в противоположность классической физике, в которой длина стержня считалась абсолютной, в теории относительности один и тот же стержень имеет различную длину в различных системах отсчета. Максимальную длину  $l_0$  стержень имеет в той системе отсчета, в которой он покоится, в системах же, движущихся по отношению к стержню, он имеет длину  $l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  тем меньшую, чем больше скорость движения. (Совершенно очевидно при этом, что сокращаются только размеры стержня, параллельные направлению движения системы отсчета. Поперечные разме-

ры, как это следует из формул преобразований Лорентца  $y' = y$ ,  $z' = z$ , не меняются.)

Представим себе два расположенных параллельно друг другу стержня  $A$  и  $B$  одинаковой длины, покоящихся в системе  $k$ . Пусть стержень  $A$  остается в покое, а стержень  $B$  начал двигаться в направлении его длины со скоростью  $v$ . Свяжем с ним другую систему отсчета  $k'$ . Тогда формула (1.8) показывает, что с точки зрения системы  $k$  длина стержня  $B$  окажется меньше, чем длина стержня  $A$ , оставшегося в покое.

Следует особо подчеркнуть, что речь не идет о каком-либо реальном физическом процессе сокращения, происходящем со стержнем. Это ясно уже потому, что один и тот же стержень имеет разную длину в разных системах отсчета.

Однако особенно очевидным это обстоятельство становится, если встать на точку зрения системы  $k'$ . В системе  $k'$  стержень  $B$  покоится, а стержень  $A$  движется со скоростью  $v$  в противоположную сторону. Поэтому в системе  $k'$ , наоборот, длина стержня  $B$  больше, чем длина стержня  $A$ .

Необходимо отдать себе отчет в том, что два эти утверждения (в системе  $k$  стержень  $A$  длиннее, чем  $B$ ; в системе  $k'$  стержень  $B$  длиннее, чем  $A$ ) отнюдь не находятся друг с другом в противоречии.

Речь здесь идет о двух различных способах измерения длины стержня. Если длины обеих стержней  $A$  и  $B$  измерять, пользуясь масштабами и часами системы  $k$  (измерять координаты концов стержней одновременно с точки зрения системы  $k$ ), то стержень  $A$  окажется длиннее стержня  $B$ . Если при измерении пользоваться масштабами и часами системы  $k'$  (измерять координаты концов стержней  $A$  и  $B$  одновременно по часам системы  $k'$ ), то стержень  $B$  окажется длиннее стержня  $A$ .

Для уяснения этого рассмотрим некоторые полезные аналогии.

Представим себе двух пешеходов, идущих в противоположных направлениях по разным сторонам улицы. Тогда каждый из них будет утверждать, что он прошел, например, правее другого. Ясно, что эти утверждения не противоречат друг другу, а означают лишь, что понятия «правее» и «левее» относительны и зависят от направления движения.

Другой пример заключается в следующем.

Пусть имеются две башни  $L$  и  $L'$  (рис. 14) одинаковой высоты.

Наблюдатель, находящийся в точке  $M$ , видит башню  $L$  под бóльшим углом, чем башню  $L'$ , а наблюдатель из точки  $M'$  видит башню  $L'$  под бóльшим углом, чем башню  $L$ . Очевидно, эти заключения не противоречат друг другу, а выражают лишь тот факт, что угол зрения есть понятие относительное и зависит от положения наблюдателя.

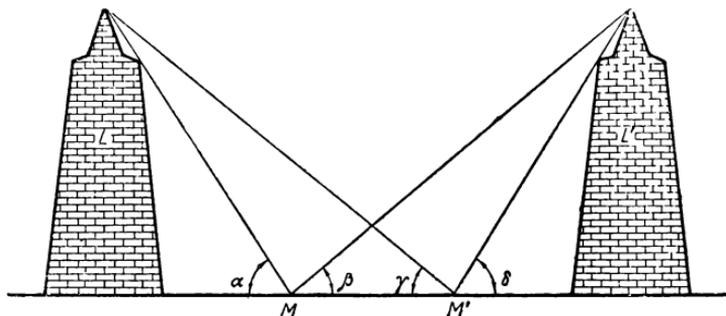


Рис. 14.

Точно также и длина стержня в теории относительности оказывается величиной относительной, и в разных системах отсчета соотношения между длинами стержней  $A$  и  $B$  различны.

Итак, один и тот же стержень в различных системах отсчета (движущихся по отношению к нему с различными скоростями) имеет различные длины

$$l_1 = l_0 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}};$$

$$l_2 = l_0 \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}};$$

$$l_3 = l_0 \sqrt{1 - \frac{v_3^2}{c^2}}.$$

... (и т. д.).

Читателю теперь должно быть ясно, что это столь же мало удивительно, как и то, что одно и то же понятие в разных языках выражается разными словами, или то, что один и тот же отрезок виден из разных точек под разными углами, или, наконец, то, что скорость пассажира

по отношению к палубе равна 3 км/час, по отношению к берегу реки равна 20 км/час, по отношению к Солнцу равна 30 км/сек и т. д.

Поэтому спрашивать, какая из длин  $l_1, l_2 \dots$  «настоящая», столь же бессмысленно, как и спрашивать, указывая на кусок хлеба, что это: хлеб или *das Brot*, или *the bread*, или спрашивать, какой угол зрения «настоящий», или задаваться вопросом, какая из скоростей «истинная». Каждая из длин есть истинная длина в своей системе отсчета.

Релятивистское сокращение стержней кажется на первый взгляд странным и непривычным потому, что все движения, с которыми мы имеем дело и в обыденной жизни, и в технике, и в астрономических явлениях, представляются собой движения чрезвычайно медленные по сравнению с распространением света. Поэтому формулы преобразований Лорентца для таких движений переходят приближенно к формулам преобразований Галилея, а формула (1.8) при условии  $v \ll c$  принимает вид

$$l \cong l_0,$$

т. е. для медленно движущихся систем отсчета длина приближенно является величиной абсолютной.

Этим объясняется и то, что формула сокращения длин (1.8) до сих пор не получила экспериментального подтверждения. Действительно, максимальные скорости макроскопических тел, достигнутые в земных условиях, составляют несколько километров в секунду, т. е. составляют по порядку величины  $10^{-5}$  от скорости света.

При таких скоростях относительное изменение длины, которое пропорционально  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ , будет порядка  $10^{-10}$ , что явно выходит за пределы современных экспериментальных возможностей измерения.

Заметим в заключение, что на первый взгляд рассмотренное нами релятивистское сокращение длины согласуется с контракционной гипотезой Лорентца — Фитцджеральда. Однако на самом деле между двумя этими концепциями существует глубокое принципиальное различие.

Действительно, по гипотезе Лорентца — Фитцджеральда (см. § 4) существует абсолютный покой (покой по отношению к эфиру) и длина стержня, находящегося в абсолютном покое, максимальна. Если стержень начинает дви-

гаться по отношению к эфиру, то происходит реальное физическое сокращение продольных размеров стержня.

Таким образом, длина стержня зависит от скорости стержня по отношению к эфиру, но не зависит от системы отсчета.

Следовательно, гипотеза Лорентца — Фитцджеральда противоречит принципу относительности; из этой гипотезы следует, что длина стержня абсолютно движущегося меньше, чем длина стержня абсолютно покоящегося и, следовательно, измеряя длину стержня, можно найти его скорость по отношению к эфиру.

В противоположность этому в теории относительности длина стержня различна в разных системах отсчета, но не зависит от скорости абсолютного движения, поскольку в теории относительности вообще теряет смысл эфир и абсолютное движение.

Поэтому измерение длины стержня в двух системах отсчета позволяет установить только факт существования относительного движения этих систем отсчета.

Перейдем теперь к вопросу о промежутках времени в теории относительности. Представим себе две системы отсчета:  $k$  и движущуюся по отношению к ней со скоростью  $v$  систему  $k'$ .

Пусть в системе  $k'$  покоятся часы.

Рассмотрим два события, происходящие в той точке, где находятся эти часы (например, начало и конец оборота стрелки этих часов на циферблате).

Пусть промежуток времени, прошедший между этими событиями в системе  $k'$ , равен  $T_0 = t_2' - t_1'$ . Найдем промежуток времени  $T = t_2 - t_1$  между этими же событиями в системе  $k$ .

Формулы преобразований Лорентца дают:

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{v}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2} x_2'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Учитывая, что  $x_1' = x_2'$  (в системе  $k'$  часы покоятся), найдем, вычитая почленно из второго равенства первое,

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

или

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.8)$$

Формула (2.8) показывает, что в противоположность классической физике, в которой промежуток времени между двумя событиями считался величиной абсолютной, в теории относительности промежуток времени между одной и той же парой событий различен в разных системах отсчета.

Наименьшую длительность  $T_0$  этот промежуток времени имеет в той системе отсчета, в которой оба события произошли в одной и той же точке пространства, в любой другой системе отсчета он будет иметь длительность

$$\frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

тем большую, чем больше скорость  $v$ .

Представим себе пару идущих синхронно часов  $A$  и  $B$ , покоящихся в системе  $k$ . Пусть теперь часы  $A$  остаются в покое, а часы  $B$  начинают двигаться со скоростью  $v$ . Свяжем с часами  $B$  другую систему отсчета  $k'$ .

Из формулы (2.8) тогда следует, что с точки зрения системы  $k'$  часы  $A$  отстают по сравнению с часами  $B$ .

Следует и в этом случае подчеркнуть, что речь не идет о каком-либо физически реальном изменении хода часов. Это ясно уже потому, что одна и та же пара событий будет разделена различными временными промежутками в разных системах отсчета. Пусть, например, наблюдатель, движущийся вместе с часами  $B$ , зажигает спичку и спустя 5 сек. спичка гаснет. Тогда часы  $A$  покажут, что прошло не 5 сек., а меньше в  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  раз.

Особенно ясным становится относительный характер промежутков времени, если встать на точку зрения системы  $k'$ . По отношению к системе  $k'$  часы  $B$  находятся в покое, а часы  $A$  движутся со скоростью  $v$  в противополож-

ном направлении. Поэтому по отношению к системе  $k'$  отстающими будут часы  $A$ .

В этих двух утверждениях не содержится никакого реального противоречия — речь идет только о двух различных способах сравнения часов.

По отношению к системе  $k$  часы  $B$  движутся, и к моменту второго события их показания следует сравнивать с

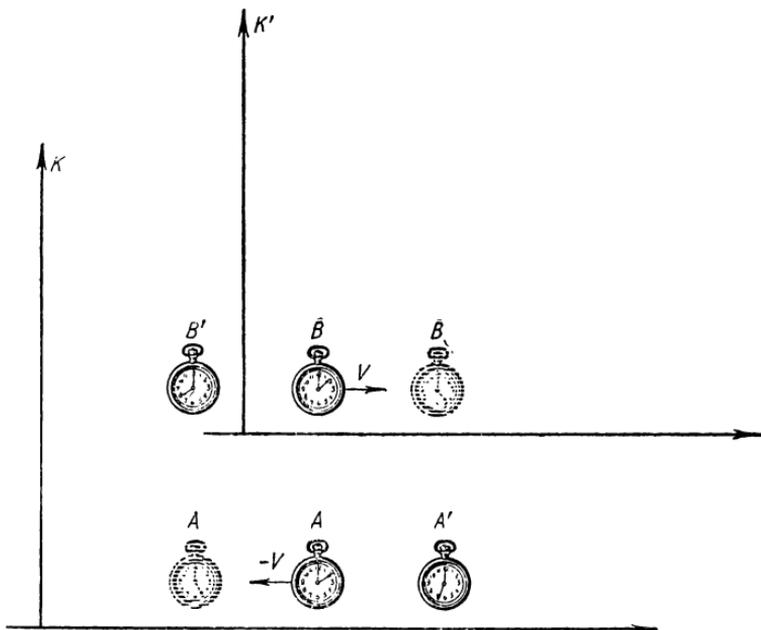


Рис. 15.

показаниями часов  $A'$  (рис. 15) системы  $k$ . Тогда часы  $B$  покажут меньшее время, чем часы  $A'$ , т. е. отстанут по сравнению с часами  $A'$ .

По отношению же к системе  $k'$  движущимися часами являются часы  $A$  и к моменту второго события их показания следует сравнивать с показаниями часов  $B'$  системы  $k'$ . Тогда часы  $A$  покажут меньшее время, чем часы  $B'$ , т. е. отстанут по сравнению с часами  $B'$ .

Отсюда видно, что никакого реального противоречия не возникает, поскольку речь идет о сравнении разных пар часов — утверждения, что часы  $A$  отстают от часов  $B'$  и часы  $B$  отстают от часов  $A'$ , вполне совместимы друг с другом.

Итак, промежуток времени между двумя событиями является понятием относительным, зависящим от системы отсчета. Время, измеренное по часам, движущимся вместе с тем телом, с которым происходят события, является наименьшим и называется обычно собственным временем для данного тела.

Если обозначить собственное время  $\tau$ , а время, измеренное по часам «неподвижной» лаборатории,  $t$ , то на основании вышеизложенного мы можем написать:

$$\begin{aligned}\tau &= t \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}, \\ d\tau &= dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}},\end{aligned}\quad (3.8)$$

где  $u$  — скорость тела.

Так же как и формула релятивистского сокращения длины, формула (3.8) при малых скоростях ( $u \ll c$ ) приводит к классическому результату

$$T \approx T_0.$$

Таким образом, для медленно движущихся систем отсчета промежуток времени между двумя событиями является приближенно абсолютной величиной. Поэтому в механике макроскопических тел и в обыденной жизни релятивистское замедление хода движущихся часов не играет никакой роли.

Однако в отличие от формулы сокращения длины формула (3.8) получила непосредственное экспериментальное подтверждение при изучении распада  $\mu$ -мезонов.

Космические лучи, приходящие на землю из мировых пространств и представляющие собой поток быстрых протонов и ядер других легких элементов, вызывают в земной атмосфере многочисленные и сложные вторичные явления, в ходе которых возникает большое многообразие вторичных частиц. В частности, на небольших высотах значительную часть космических лучей составляют так называемые  $\mu$ -мезоны. Они представляют собой частицы более тяжелые, чем электроны, но более легкие, чем протоны и нейтроны — масса их равна приблизительно 206 электронных масс. В природе существуют  $\mu$ -мезоны с обоими знаками электрического заряда  $\mu^+$  и  $\mu^-$ .

Как выяснилось,  $\mu$ -мезоны представляют собой частицы неустойчивые, они распадаются на электрон или позитрон.

трон (в зависимости от знака заряда) и две легкие нейтральные частицы нейтрино

$$\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + 2\nu. \quad (4.8)$$

Этот распад подчиняется такому же закону, как и распад ядер радиоактивных веществ

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где  $N_0$  — число мезонов, существовавших к моменту  $t=0$ ,  $N$  — число мезонов, не распавшихся ко времени  $t$ ,  $\lambda$  — так называемая постоянная распада,  $\tau = \frac{1}{\lambda}$  — среднее время жизни мезонов.

Поток  $\mu$ -мезонов, проходя через вещество, ослабляется в силу двух причин: во-первых, мезоны растрачивают свою энергию при соударениях с атомами, ионизуя их, и перестают действовать на регистрирующий прибор (счетчики Гейгера — Мюллера); во-вторых, мезоны распадаются по схеме (4.8). Поэтому уменьшение интенсивности потока мезонов при прохождении слоя воздуха будет более значительным, чем при прохождении слоя плотного вещества (например, свинца), содержащего такое же количество электронов и обладающего, следовательно, такой же тормозящей способностью. Действительно, хотя затормозятся в этих слоях одинаковые количества мезонов, но в слое воздуха большей протяженности успеет распасться значительно больше мезонов, чем в слое свинца небольшой толщины. Это позволяет по измерению избыточного ослабления пучка мезонов в слое воздуха по сравнению с ослаблением в эквивалентном слое свинца найти среднее время жизни мезонов  $\tau$ .

Нетрудно, однако, видеть, что, поскольку отсчет времени производится по часам системы, связанной с Землей, а не по часам, движущимся вместе с мезонами, среднее время жизни мезонов  $\tau$  должно зависеть от скорости мезонов  $v$  согласно формуле Эйнштейна

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где  $\tau_0$  — время, отсчитанное по часам, движущимся вместе с мезоном, или, иначе говоря, время жизни покоящегося мезона.

Так как мезоны движутся с релятивистскими скоростями, близкими к  $c$ , то этот эффект для них должен оказаться вполне заметным.

Поскольку в потоке мезонов присутствуют частицы с различными скоростями, то для измерения времени жизни мезонов нужно выделять пучок мезонов определенной скорости. Эта «монокроматизация» пучка мезонов может быть выполнена различными методами достаточно надежно и измерение времени жизни мезонов  $\tau$  может быть проведено для различных скоростей мезонов. Тогда экспериментальное подтверждение релятивистской формулы сведется к проверке справедливости соотношения

$$\tau \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \tau_0 = \text{const.}$$

Опыт показал, что в пределах экспериментальных ошибок это соотношение выполняется достаточно точно.

## § 9. Интервал

В предыдущих параграфах мы видели, что промежуток времени между двумя событиями, происходящими в некоторой системе координат в одной точке, и расстояние между двумя точками, измеренное в один и тот же момент времени, являются понятиями относительными, т. е. их численные значения зависят от выбора системы отсчета.

Рассмотрим теперь два события, происходящие в различных точках пространства и в различные моменты времени.

Пусть в системе  $k$  координаты точек, где произошли эти события, —  $x_1, y_1, z_1$  и  $x_2, y_2, z_2$ , а моменты времени этих событий —  $t_1$  и  $t_2$ . Будем для простоты считать, что оба события происходят в точках, лежащих на оси  $OX$ , т. е., что  $y_1 = z_1 = 0$  и  $y_2 = z_2 = 0$ .

Пользуясь формулами преобразований Лоренца

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x'_2 &= \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} t'_1 &= \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t'_2 &= \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\},$$

нетрудно найти, как изменяется расстояние между точками, где произошли события, и промежуток времени между событиями в зависимости от выбора системы отсчета.

Вычитая почленно данные равенства, получим

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1 - \frac{v}{c^2} (t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1.9)$$

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.9)$$

Мы видим, что формулы (1.9) и (2.9) отличаются от формул сокращения длины стержня и замедления хода движущихся часов наличием дополнительных слагаемых в правой части.

Если положить в формуле (1.9)  $t_2 = t_1$  и в формуле (2.9)  $x_2 = x_1$ , то, как нетрудно видеть, мы получаем уже известные нам результаты

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Итак, и в этом более общем случае расстояние между точками и промежуток времени между событиями являются величинами относительными.

Однако нетрудно видеть, что по основному свойству преобразований Лорентца величина

$$S^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2 \quad (3.9)$$

<sup>1</sup> Полагая  $t_2 = t_1$  (измерение координат одновременно по часам системы  $k$ ), мы должны в противоположность § 8 считать  $l = x_2 - x_1$ ,  $l_0 = x'_2 - x'_1$ .

является инвариантной по отношению к преобразованиям Лорентца, т. е. имеет одно и то же значение во всех галилеевых системах отсчета.

Действительно, из формул (1.9) и (2.9) следует, что

$$\begin{aligned} (x'_2 - x'_1)^2 - c^2 (t'_2 - t'_1)^2 &= \frac{(x_2 - x_1)^2 - 2v(x_2 - x_1)(t_2 - t_1) +}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &+ \frac{v^2(t_2 - t_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 + 2v(x_2 - x_1)(t_2 - t_1) - \frac{v^2}{c^2}(x_2 - x_1)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \\ &= (x_2 - x_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2, \end{aligned}$$

так как  $y'_2 - y'_1 = y_2 - y_1$  и  $z'_2 - z'_1 = z_2 - z_1$ , то доказательство инвариантности  $S^2$  завершено.

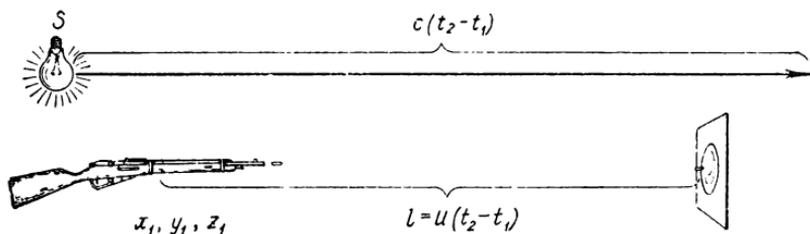


Рис. 16.

Величина  $S$  в теории относительности носит название интервала между двумя событиями<sup>1</sup>.

Мы пользуемся здесь случаем еще раз подчеркнуть, что в теории относительности наряду с величинами относительными (длина стержня  $l$ , промежуток времени  $T$ ) фигурируют и абсолютные величины — скорость света в вакууме  $c$  и интервал  $S$ .

Своеобразие теории относительности заключается в том, что переносится граница между относительными и абсолютными величинами.

<sup>1</sup> Инвариантность интервала может быть доказана и проще. При выводе преобразований Лорентца мы исходили из инвариантности величины  $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ , т. е. величины квадрата интервала, отделяющего событие с координатами  $x, y, z, t$  от события  $0, 0, 0, 0$ . Так как начало координат и начало отсчета времени можно выбрать произвольно, то тем самым и интервал между двумя произвольными событиями оказывается инвариантной величиной.

Если в классической физике положение этой границы иллюстрируется схемой:

Относительные величины	Абсолютные величины
Координаты $(x, y, z)$	Длина $(l)$ , промежуток времени $(T)$ , интервал $(S)$

то в теории относительности эта схема выглядит так:

Относительные величины	Абсолютные величины
Координаты $(x, y, z, t)$ , длина $(l)$ , промежуток времени $(T)$	Интервал $(S)$

Пары событий и разделяющие их интервалы классифицируются по типам.

1. Пусть два события, о которых идет речь, представляют собой выстрел из ружья и попадание пули в мишень. Тогда  $x_2 - x_1 = l$  есть расстояние от ружья до цели,  $t_2 - t_1 = T$  есть время, прошедшее от выстрела до падения пули в цель (в системе отсчета  $k$ , в которой ружье и мишень находятся в покое).

Если средняя скорость пули есть  $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ , то, так как  $|u| < c$ , имеет место неравенство

$$|x_2 - x_1| = |u(t_2 - t_1)| < c |t_2 - t_1|$$

или в общем случае (когда движение происходит не в направлении линии оси  $OX$ )

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 < c^2 (t_2 - t_1)^2. \quad (4.9)$$

Нетрудно понять, что неравенство (4.9) представляет собой условие того, что из двух рассматриваемых событий одно является или по крайней мере могло бы явиться причиной другого.

Действительно, физическое содержание неравенства (4.9) заключается в том, что путь, проходимый световым сиг-

налом за время, отделяющее одно событие от другого, больше, чем расстояние между точками, в которых произошли эти события (рис. 16).

Поэтому может существовать такой реальный процесс, такое взаимодействие, которое, распространяясь со скоростью меньшей, чем скорость света, пройдет это расстояние за время, отделяющее эти события. В нашем примере таким процессом является движение пули.

Заметим, что если неравенство (4.9) выполнено, то квадрат интервала

$$S^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2 < 0$$

является отрицательной величиной, а сам интервал  $S$  есть величина чисто мнимая.

Итак, мнимые интервалы разделяют два события, которые связаны (или по крайней мере в принципе могли бы быть связаны) причинно-следственной связью.

Подставляя в формулу (1.9)

$$t_2 - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{u},$$

а в формулу (2.9)

$$x_2 - x_1 = u (t_2 - t_1),$$

мы получим

$$x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - x_1) \left(1 - \frac{v}{u}\right)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (5.9)$$

и

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (6.9)$$

Зададимся теперь вопросом: нельзя ли найти такую систему отсчета  $k'$ , в которой выстрел и попадание пули в мишень произошли бы в одной и той же точке.

С точки зрения классической физики ответ на этот вопрос совершенно естественен: надо связать систему отсчета  $k'$  с вагоном, движущимся с такой же скоростью, что и пуля (рис. 17). Тогда в этой системе отсчета пуля покоится и, следовательно, два события — вылет пули из канала ствола и попадание пули в мишень — произойдут в одной и той же точке системы  $k'$ .

Более того, если заставить вагон двигаться со скоростью, несколько большей скорости пули, то изменится порядок следования событий в пространстве: если в системе  $k$  выстрел произошел левее, чем попадание пули в мишень ( $x_2 > x_1$ ), то в системе  $k'$  левее расположена точка попадания пули в мишень ( $x'_2 < x'_1$ ).

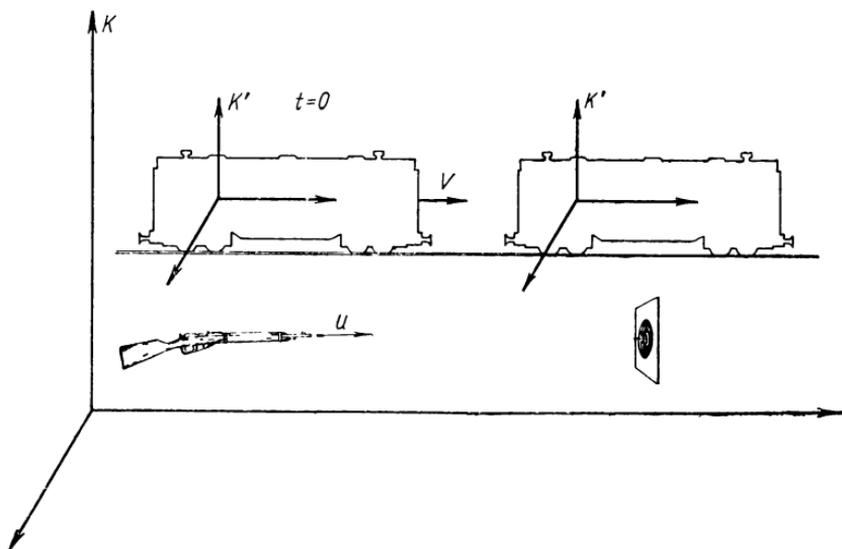


Рис. 17.

Нетрудно видеть, что такой же ответ на этот вопрос дает и теория относительности. Действительно, из формулы (5.9) мы видим, что:

$$\text{при } v=u, \quad x'_2 - x'_1 = 0,$$

т. е. координаты точки выстрела и точки попадания в мишень совпадают. Если же взять  $v > u$ , то разность  $x'_2 - x'_1$  будет иметь знак, противоположный знаку разности  $x_2 - x_1$ .

Заметим, что в той системе отсчета, в которой  $x'_2 - x'_1 = 0$  интервал  $S$ , разделяющий события, сводится к промежутку времени между этими событиями (умноженному на  $ic$ )

$$S = ic(t'_2 - t'_1).$$

Поэтому такие интервалы принято называть времени-подобными.

Заметим, что интервал, разделяющий приход движущегося тела в две разные точки пространства, просто связан с элементом собственного времени этого тела. В самом деле, для таких двух событий имеем

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = c^2 dt^2 \left( \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2} - 1 \right).$$

Но так как

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = u^2$$

есть квадрат скорости тела, получаем

$$dS = icdt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = icd\tau,$$

где  $d\tau$  [см. формулу (3.8) предыдущего параграфа] есть интервал собственного времени тела.

Поставим теперь другой вопрос: нельзя ли найти такую систему отсчета, в которой выстрел и попадание пули в мишень совпали бы во времени?

С точки зрения классической физики сама постановка такого вопроса является абсурдной, так как время в классической физике абсолютно.

В теории относительности промежуток времени между событиями является величиной вариантной, зависящей от системы отсчета, однако формула (6.9) показывает, что в рассматриваемом случае обращение разности  $t_2 - t'_1$  в нуль (и тем более перемена знака этой разности) невозможно.

Действительно, так как  $u \leq c$  и  $v \leq c$ , то числитель правой части формулы (4.9) ни обратиться в нуль, ни тем более стать отрицательным не может.

Это обстоятельство совершенно естественно, другой результат противоречил бы закону причинности, так как это означало бы, что можно найти такую систему отсчета, в которой причина имела бы место одновременно со следствием (или даже позже следствия). Например, в нашем случае это означало бы, что выстрел произошел одновременно (или даже позже) с попаданием пули в мишень.

Итак, мы видим, что времени - подобные (мнимые) интервалы разделяют события, связанные друг с другом (или могущие быть связанными) причинно-следственной связью.

Для таких событий можно подобрать такую систему отсчета, в которой эти события станут одномоментными, но ни в

какой системе отсчета эти события не могут стать одновременными или поменяться порядком во времени.

Иначе говоря, для таких событий понятия «раньше» и «позже» являются абсолютными понятиями.

Если  $t_2 > t_1$  в одной системе отсчета, то и в любой другой системе отсчета  $t'_2 > t'_1$ . Поэтому в этом случае второе событие (например, попадание пули в мишень) можно назвать «абсолютно будущим» по отношению к первому, а первое (например, вылет пули из канала ствола) — «абсолютно прошедшим» по отношению ко второму событию.

2. Рассмотрим теперь два события, которые заведомо не могут быть связаны причинно-следственной связью. Пусть, например, первое событие заключается в том, что в Галактике, в точке, удаленной от Земли на 100 световых лет, вспыхнула «новая» звезда. За 20 лет до прибытия световых волн на Землю, т. е. спустя 80 лет после вспышки, на Земле была издана книга, посвященная вспышкам «новых» звезд. Ясно, что первое событие не может оказать никакого влияния на второе.

Математически это выражается тем, что расстояние между звездой и Землей больше, чем путь, пройденный световым сигналом за 80 лет

$$|x_2 - x_1| > c |t_2 - t_1|$$

или в общем случае (если ось  $OX$  не совпадает с линией звезда — Земля)

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 > c^2 (t_2 - t_1)^2. \quad (7.9)$$

Квадрат интервала, разделяющий такие два события, как нетрудно видеть, будет положителен

$$S^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2 > 0,$$

а сам интервал — вещественным.

Нетрудно понять, что это является общим свойством всех интервалов, разделяющих события, которые не могут быть связаны причинно-следственной связью.

Зададим себе и в этом случае вопрос, можно ли найти такую систему отсчета  $k'$ , в которой рассматриваемые события (вспышка звезды и выход в свет книги) произошли бы в одной точке, стали бы одноместными, т. е. было бы справедливо равенство:

$$x'_2 - x'_1 = 0.$$

Из формулы (1.9) вытекает, что, для того чтобы в системе  $k'$  разность координат событий  $x'_2 - x'_1$  обратилась в нуль, необходимо выполнение равенства

$$x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1).$$

Но так как по условию для рассматриваемых событий

$$x_2 - x_1 > c(t_2 - t_1),$$

то это равенство могло бы выполняться только при  $v > c$ . Таким образом, вспышка звезды и выход в свет книги могли бы иметь место в одной и той же точке только в системе отсчета, движущейся со скоростью, большей  $c$ .

Однако, как мы знаем, в теории относительности скорость света в вакууме является предельной скоростью для всех реальных процессов.

Следовательно, мы приходим к выводу, что ни в какой системе отсчета два события, которые принципиально не могут быть связаны причинно-следственной связью, не могут стать одноместными. Поэтому такие события называются абсолютно удаленными друг от друга.

Очевидно также, что нельзя найти такую систему, в которой изменился бы знак разности  $x'_2 - x'_1$ . Это значит, что для событий рассматриваемого типа понятия «левее» и «правее» являются абсолютными. Если, например,  $x_2 > x_1$ , то и в любой другой системе отсчета  $x_2 > x_1$ . Поэтому второе событие может быть названо в этом случае «абсолютно правым» по отношению к первому, а первое «абсолютно левым» по отношению ко второму.

Зададимся теперь вопросом, нельзя ли найти такую систему отсчета, в которой вспышка звезды и выход в свет книги произошли бы в один и тот же момент времени, т. е. было бы верным равенство

$$t'_2 - t'_1 = 0.$$

Из формулы (2.9) видно, что это равенство будет справедливо при условии, что

$$t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1) = 0,$$

т. е. в случае, если скорость системы отсчета  $v$  равна

$$v = \frac{c^2(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1}.$$

Но так как по условию для рассматриваемых событий

$$x_2 - x_1 > c(t_2 - t_1),$$

то выражение, стоящее в правой части этого равенства, меньше  $c$

$$v = \frac{c^2(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1} < c. \quad (8.9)$$

Так как любые скорости систем отсчета, меньшие  $c$ , согласно теории относительности допустимы, то отсюда следует, что систему  $k'$ , в которой бы рассматриваемые события произошли в один и тот же момент времени, принципиально можно осуществить (мы не имеем здесь, конечно, в виду техническую осуществимость этого на современном уровне развития техники).

Более того, увеличив еще немного скорость системы отсчета по сравнению со значением (8.9), мы можем изменить знак разности  $t'_2 - t'_1$ .

Физически это значит, что если в системе отсчета  $k$  первое событие (вспышка звезды) произошло раньше второго (выход в свет книги), т. е.  $t_2 > t_1$ , то можно найти такую систему  $k'$ , в которой второе событие произошло раньше первого  $t' < t'_1$ . Таким образом, для событий рассматриваемого типа понятия «раньше» и «позже» являются относительными.

Следует, однако, отдать себе ясный отчет в том, что, несмотря на всю непривычность и кажущуюся парадоксальность этого обстоятельства, в нем, естественно, нет ничего противоречащего ни логике, ни жизненному опыту людей.

Действительно, поскольку речь идет о событиях, которые не связаны (и не могут быть связаны) причинно-следственной связью, то изменение порядка чередования этих событий во времени не противоречит закону причинности, так как ни в одной системе отсчета следствие не может иметь место раньше события, являющегося его причиной.

Отметим, что для рассмотренного класса событий в той системе, в которой  $t_2 - t_1 = 0$ , квадрат интервала сводится к квадрату пространственного расстояния между точками, где произошли события

$$S^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = L^2, \\ S = L.$$

В связи с этим такие интервалы принято называть пространственно-подобными,

Итак, события, которые принципиально не могут быть связаны причинно-следственной связью, разделяются пространственно-подобными вещественными интервалами. Для такой пары событий можно подобрать такую систему отсчета, в которой оба события станут одновременными (и даже поменяются порядком во времени), но ни в какой системе отсчета они не могут стать одноместными.

3. Пусть, наконец, два события, о которых идет речь, представляют собой испускание светового сигнала в точке

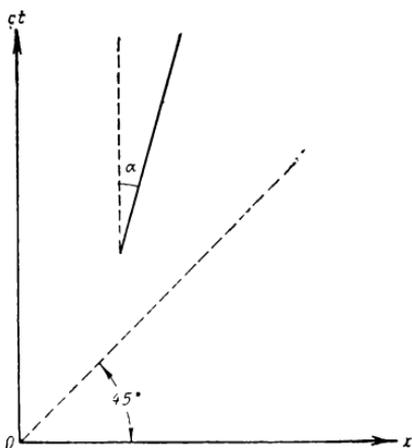


Рис. 18.

с координатой  $x_1$  в момент времени  $t_1$  и прибытие светового сигнала в точку с координатой  $x_2$  в момент времени  $t_2$ . Так как в этом случае

$$x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1),$$

то, как нетрудно видеть, интервал, разделяющий эти события, равен нулю

$$S^2 = (x_2 - x_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0.$$

Легко понять, что нулевой интервал представляет собой предельный случай как времени-подобных (вещественных) интервалов, так и пространственно-подобных (мнимых) интервалов.

Это соответствует тому, что события, связанные распространением светового сигнала, ввиду предельного характера  $c$ , представляют собой предельный случай событий, связанных причинно-следственной связью.

Из формул (5.9) и (6.9) видно, что при  $u=c$  пара событий могла бы быть сделана и одноместной, и одновременной только в системе отсчета, движущейся со скоростью света. Рассмотренная классификация пар событий и интервалов, их разделяющих, допускает простую геометрическую интерпретацию.

Будем рассматривать события, происходящие вдоль оси  $OX$ , и отложим по оси ординат координаты  $x$  этих событий, а по оси абсцисс времена этих событий, умноженные на  $c$  (рис. 18).

Каждое событие на этой диаграмме изобразится точкой, а всякое равномерное и прямолинейное движение—прямой линией, причем тангенс угла наклона этой прямой по отношению к оси  $ct$  будет равен

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dx}{c dt} = \frac{u}{c} = \beta,$$

где  $u$  — скорость движения.

Так как для всех реальных движений  $u \leq c$ , то линии всех этих движений могут составлять с осью  $ct$  углы, не превышающие  $45^\circ$ .

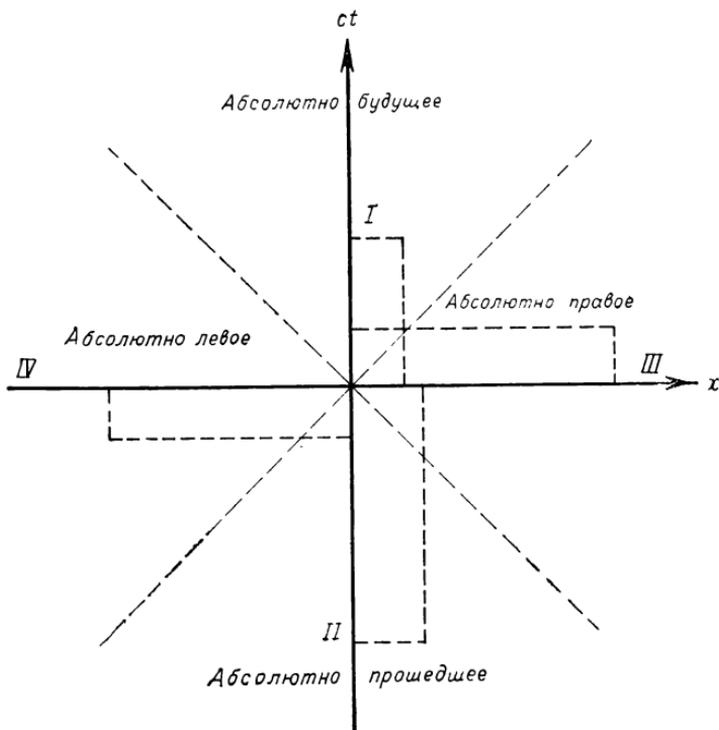


Рис. 19.

Биссектрисы координатных углов изображают, очевидно, распространение световых сигналов  $u=c$ .

Пусть теперь одно из событий, разделенных интервалом, есть событие, изображаемое точкой начала координат на рисунке 19, т. е. событие, происшедшее в точке  $x=0$  и

в момент времени  $t=0$  (для краткости будем обозначать его в дальнейшем как событие  $O$ ).

Биссектрисы координатных углов делят всю плоскость  $(x, ct)$  на области: I, II, III, IV.

Нетрудно видеть, что для всех точек областей I и II  $|x| < |ct|$ , т. е. эти точки изображают события, отделенные от события  $O$  времени-подобными интервалами. Так как при этом для области I  $t > 0$ , то точки этой области изображают события «абсолютно будущие» по отношению к событию  $O$ . Для области же II  $t < 0$ , и точки этой области изображают события, «абсолютно прошедшие» по отношению к событию  $O$ .

В противоположность этому для точек областей III и IV  $|x| > |ct|$ , и события, изображаемые этими точками, отделены от события  $O$  пространственно-подобными интервалами и, следовательно, являются событиями, абсолютно удаленными от события  $O$ . Так как при этом для области III  $x < 0$ , а для области IV  $x > 0$ , то в области III лежат события «абсолютно левые» по отношению к  $O$ , а в области IV события «абсолютно правые» по отношению к  $O$ .

Точки, лежащие на биссектрисах координатных углов, изображают распространение световых сигналов от точки  $O$  (или к точке  $O$ ) и отделяют «абсолютно удаленные» события от абсолютно будущих и «абсолютно прошедших» событий.

---

## ГЛАВА III

### ДИНАМИКА ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

#### § 10. Зависимость массы от скорости

В предыдущем параграфе мы в основном закончили изложение релятивистской кинематики и должны теперь перейти к построению динамики теории относительности, т. е. к выяснению связи между движением тела, его свойствами (масса) и причинами, изменяющими состояние движения (сила).

Обратимся сначала к истории возникновения и развития классической динамики Ньютона.

Следует отметить, что классическая механика возникла как наука, изучающая визуально наблюдаемые движения макроскопических тел (артиллерийских снарядов, небесных тел и т. д.). Поэтому, естественно, прежде всего в механику были введены наглядные понятия, непосредственно отображающие чувственные восприятия человека — траектория движущегося тела и путь, пройденный движущимся телом.

Первой ступенью абстракции было введение понятия скорости тела, как пути, отнесенного к единице времени.

При этом вначале речь шла только о средней скорости на некотором интервале  $u_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$  и только впоследствии (Галилей) вводится понятие мгновенной скорости  $u = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ .

На следующем этапе вводится представление об ускорении, как изменении мгновенной скорости за единицу времени.

Параллельно с кинематическими понятиями вводятся и первые динамические величины.

Мерой воздействия одного тела на другое является сила  $\vec{F}$ . Это воздействие изменяет состояние движения тела, делает его из равномерного ускоренным или из прямолинейного криволинейным, т. е. приводит к возникновению ускорения.

Понятие силы возникло первоначально в результате наблюдения взаимодействия тел при непосредственном контакте (удар, давление, натяжение нити и т. д.). Только в дальнейшем возникает представление о пресловутом «действии на расстоянии» (*actio in distance*), окончательно из науки успехами физики поля.

Наконец, вводится представление о массе тела, как его индивидуальной постоянной характеристике, измеряющей инертность тела, т. е. степень его неподатливости сообщению ускорения.

Однако, вводя все эти величины, мы все еще остаемся в кругу понятий, порожденных нашими чувственными восприятиями. В самом деле, не только траектория, путь, скорость, ускорение могут быть, хотя бы грубо, оценены по визуальным наблюдениям, но и масса и сила могут быть грубо оценены по мускульному усилию.

Следующим важным этапом в развитии механики являлось введение более абстрактных понятий: количества движения, или импульса, измеряемого произведением массы тела на его скорость, и кинетической энергии тела, измеряемой в классической физике половиной произведения массы тела на квадрат его скорости.

Импульс  $\vec{p} = m\vec{u}$  и кинетическая энергия  $T = \frac{m\vec{u}^2}{2}$  представляют собой две различные меры движения. В то время как кинетическая энергия, как величина скалярная, характеризует движение только с количественной стороны, импульс, как величина векторная, указывает и на направленность движения.

Основной закон классической механики — второй закон Ньютона — может быть записан в виде уравнения, связывающего скорость изменения импульса и силу, действующую на тело

$$\frac{d}{dt}(m\vec{u}) = \vec{F}. \quad (1.10)$$

Так как в классической механике массу неизменяемого тела считают величиной постоянной, то, вынося ее за знак

производной по времени, мы получаем другую общеизвестную формулировку второго закона Ньютона

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}. \quad (2.10)$$

Заметим, однако, что даже в классической механике формулировку (1.10) следует считать более общей, чем формулировку (2.10), поскольку она верна и для тел, масса которых изменяется при движении (ракета, поезд с изменяющимся грузом и т. д.).

Умножая обе части уравнения (2.10) скалярно на вектор скорости частицы  $\vec{u}$ , мы получаем для тела с постоянной массой соотношение

$$m\vec{u} \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u}$$

или

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mu^2}{2} \right) = \vec{F} \cdot \vec{u}. \quad (3.10)$$

Уравнение (1.10) и вытекающее из него для тел с постоянной массой уравнение (3.10) можно записать в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}; \quad (4.10)$$

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u}. \quad (5.10)$$

Итак, скорость изменения импульса тела равна действующей на тело силе, а скорость изменения кинетической энергии равна работе этой силы за единицу времени (мощности).

Импульс и кинетическая энергия, как две меры движения, обладают существенными преимуществами по сравнению со скоростью, ускорением и т. п., так как для них имеют место так называемые законы сохранения.

Например, при соударении двух шаров с массами  $m_1$  и  $m_2$  имеем:

$$\frac{d}{dt} (m_1 \vec{u}_1) = \vec{F}_1;$$

$$\frac{d}{dt} (m_2 \vec{u}_2) = \vec{F}_2.$$

Так как по третьему закону механики

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2,$$

то, складывая почленно эти равенства, получим:

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2) = 0,$$

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = \text{const},$$

в то время как скорости  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  и сумма скоростей  $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$  являются переменными величинами.

Точно так же при упругом ударе двух шаров сохраняется и сумма их кинетических энергий

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} = \text{const}.$$

Необычайная плодотворность введения понятий импульса и энергии выяснилась особенно в результате их распространения на другие разделы физики.

Предсказанное Максвеллом и открытое Лебедевым давление света показало, что свет (и вообще электромагнитные волны), как любая движущаяся материя, обладает количеством движения (а следовательно, и массой).

Распространение понятия энергии на другие формы движения (тепловая, электромагнитная и т. д.) привело к открытию фундаментального закона природы — закона сохранения и превращения энергии.

Естественно поэтому и при исследовании законов движения тел в релятивистской области (движения с большими скоростями) поставить во главу угла понятия импульса и энергии тела.

Переходя к задаче отыскания закона движения тел с большими скоростями, заметим прежде всего, что второй закон Ньютона в форме (2.10)

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}$$

не может быть верным в релятивистской области.

В самом деле, любой точный закон природы должен в согласии с принципом относительности выполняться во всех галилеевых системах отсчета (быть верным на любом «языке

ке»). Это значит, что точные законы природы должны быть инвариантными по отношению к преобразованиям Лорентца (так как они представляют собой правильный «словарь» для перехода от языка одной галилеевой системы отсчета к другой). Но равенство (2.10), являясь инвариантным по отношению к преобразованиям Галилея, не может быть инвариантным по отношению к преобразованиям Лорентца.

Следовательно, если равенство (2.10) даже и будет верным в некоторой системе отсчета (на «языке» системы  $k$ ), то оно не будет выполняться в других галилеевых системах отсчета (на других «языках»). Но это значит, что второй закон Ньютона в форме (2.10) не согласуется с принципом относительности и, следовательно, не может представлять собой точный закон природы, а является законом приближенным, верным лишь при малых скоростях тел (пока преобразования Галилея допустимы в качестве «словаря»).

Причина этого кроется в следующем. В классической механике масса тел считалась величиной неизменной. Об этом свидетельствует, казалось бы совершенно убедительно, опыт. В самом деле, хорошо известно, что под действием постоянной силы тела движутся равномерно-ускоренно, т. е. приобретают постоянное ускорение.

Например, при неизменном режиме работы двигателя тепловоз увеличивает свою скорость от 30 км/час до 31 км/час и от 60 км/час до 61 км/час за одно и то же время.

Таким образом, отношение силы к ускорению при движении тела остается неизменным. Следовательно, инертность тела и масса, как мера инертности, являются величинами постоянными, независимыми от скорости движущегося тела.

Однако эта закономерность, на которой в значительной степени базируется все здание классической механики, оказывается справедливой лишь при малых скоростях движения. На это со всей определенностью указывает опыт современной техники ускорения заряженных частиц микромира (электронов, протонов и т. д.).

Рассмотрим, например, процесс ускорения протонов постоянным электрическим полем в так называемом линейном ускорителе, в котором ускоряемые частицы двигаются прямолинейно.

Согласно законам классической механики (в предположении, что масса протона не меняется при движении)

напряженность электрического поля  $E$ , нужная для ускорения, определяется формулой

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = e\vec{E},$$

где  $e$  — заряд протона.

Для того чтобы сообщить протонам ускорение  $\frac{du}{dt} \approx \approx 10^{18} \frac{см}{сек^2}$  (таково по порядку величины ускорение тяжелых частиц в линейных ускорителях), надо получить поле с напряженностью

$$E = \frac{m \frac{du}{dt}}{e} = \frac{1,67 \cdot 10^{-24} \cdot 10^{18}}{4,8 \cdot 10^{-10}} \cdot 300 \frac{в}{см} = 1,04 \cdot 10^6 \frac{в}{см}$$

независимо от того, какова была начальная скорость протона.

Однако опыт физики ускорителей с очевидностью показывает, что это не так: нужная напряженность поля зависит от того, какова уже набранная протоном скорость. Проиллюстрируем это таблицей, в которой в левой колонке указаны начальные скорости протонов, а в правой колонке выписаны напряженности поля, необходимые, чтобы сообщить протону ускорение  $10^{18} \frac{см}{сек^2}$ . (В следующем параграфе мы решим эту задачу и увидим, как эти числа могут быть вычислены с помощью формул релятивистской динамики.)

Начальная скорость протона (см/сек)	Напряженность (в/см)
$10^7$	$1,04 \cdot 10^6$
$10^8$	$1,04 \cdot 10^6$
$10^9$	$1,04 \cdot 10^6$
$10^{10}$	$1,24 \cdot 10^6$
$2 \cdot 10^{10}$	$5,4 \cdot 10^6$
$2,5 \cdot 10^{10}$	$15,3 \cdot 10^6$
$2,75 \cdot 10^{10}$	$43,2 \cdot 10^6$
$2,9 \cdot 10^{10}$	$170,9 \cdot 10^6$

Мы видим, что числа правой колонки постоянны только до тех пор, пока  $u \ll c$ , а затем, чем больше становится скорость, достигнутая протоном, тем более сильное поле

надо приложить для его дальнейшего ускорения. Но это в свою очередь означает, что с ростом скорости тела возрастает его инертность, а следовательно, масса.

Итак, эксперимент указывает, что при больших скоростях масса тела должна зависеть от абсолютной величины его скорости

$$m = m(u); \quad u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}.$$

Вид этой функциональной зависимости может быть однозначно установлен, если воспользоваться законом сохранения импульса и релятивистской теоремой сложения скоростей.

Рассмотрим с этой целью следующий простой мысленный эксперимент, указанный впервые Толменом.

Пусть происходит упругое соударение двух одинаковых шаров  $A$  и  $B$ , причем в системе  $k$  скорости шаров до удара равны по величине и противоположны по направлению (рис. 20). Если мы обозначим проекции скорости шара  $A$  на оси  $OX$  и  $OY$  соответственно через  $a$  и  $b$ , то соответствующие проекции скорости шара  $B$  будут равны  $-a$  и  $-b$ . Пусть в результате столкновения иксевые проекции скоростей обоих шаров остаются неизменными, а игрековые проекции меняют знак, т. е. шары разлетаются в направлениях, указанных на рисунке 20 пунктирными стрелками. Тогда в системе отсчета  $k$  мы имеем следующую таблицу для скоростей шаров  $A$  и  $B$  до и после удара.

	До удара		После удара	
	$u_x$	$u_y$	$u_x$	$u_y$
Шар $A$	$a$	$b$	$a$	$-b$
Шар $B$	$-a$	$-b$	$-a$	$b$

В этой системе отсчета суммарный импульс и до и после удара равен нулю. В самом деле, проекции на оси  $OX$  и  $OY$  вектора  $m(u_A) \cdot \vec{u}_A + m(u_B) \cdot \vec{u}_B$  до удара и после удара равны:

$$\begin{aligned} m(\sqrt{a^2 + b^2}) \cdot a + m(\sqrt{a^2 + b^2}) \cdot (-a) &= 0; \\ m(\sqrt{a^2 + b^2}) \cdot b + m(\sqrt{a^2 + b^2}) \cdot (-b) &= 0. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к системе отсчета  $k'$ , движущейся по отношению к системе  $k$  со скоростью  $\vec{a}$ , и найдем скорости шаров  $A$  и  $B$  до и после удара в системе отсчета  $k'$ , пользуясь

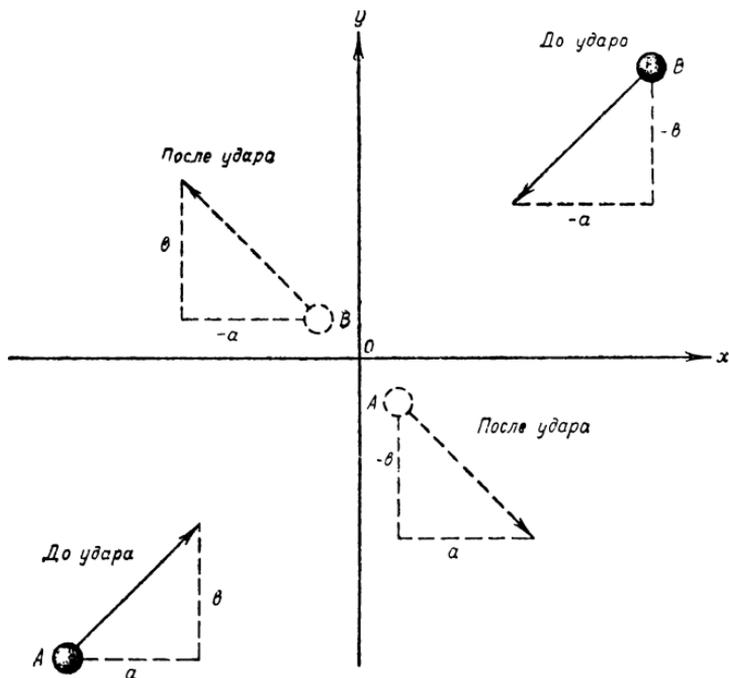


Рис. 20.

релятивистской теоремой сложения скоростей

$$u'_x = \frac{u_x - a}{1 - \frac{u_x a}{c^2}};$$

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x a}{c^2}}.$$

Подставляя значения  $u_x$  и  $u_y$  до и после удара в эту формулу, мы получим для системы отсчета  $k'$  таблицу:

	До удара		После удара	
	$u'_x$	$u'_y$	$u'_x$	$u'_y$
Шар А	0	$\frac{b}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}}$	0	$-\frac{b}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}}$
Шар В	$-\frac{2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}}$	$-\frac{b \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}}{1 + \frac{a^2}{c^2}}$	$-\frac{2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}}$	$\frac{b \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}}{1 + \frac{a^2}{c^2}}$

Таким образом, в системе  $k'$  шар А и до и после удара движется вдоль оси  $OY'$  и картина удара будет соответствовать рисунку 21.

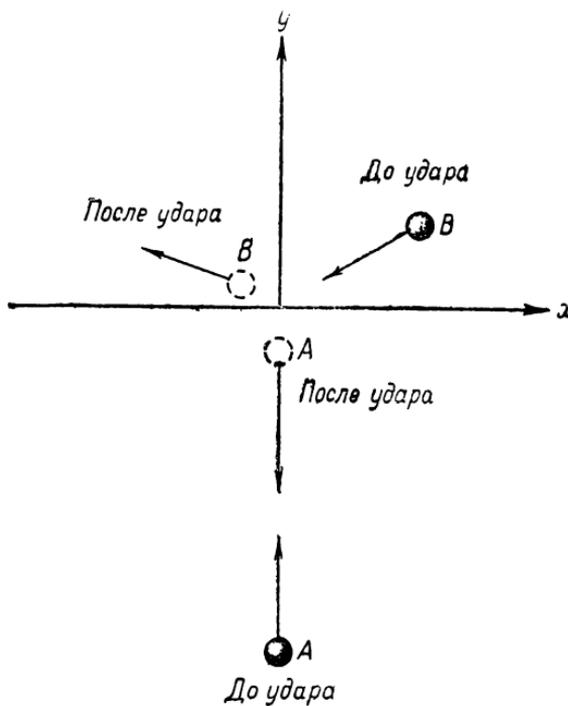


Рис. 21.

Запишем закон сохранения импульса в системе  $k'$ . Так как абсолютная величина скорости равна:

$$\begin{aligned} \text{для шара } A & \frac{b}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}}, \\ \text{а для шара } B & \frac{\sqrt{4a^2 + b^2} \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)}{1 + \frac{a^2}{c^2}}, \end{aligned}$$

то закон сохранения для проекций импульса на ось  $OX'$  выполняется тождественно, а закон сохранения проекций импульса на ось  $OY'$  дает уравнение:

$$\begin{aligned} & m \left( \frac{b}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}} \right) \frac{b}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}} + \\ & + m \left( \frac{\sqrt{4a^2 + \frac{b^2}{1 - \frac{a^2}{c^2}}}}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \right) \left( - \frac{b \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Поделив на общий множитель  $b$ , мы получаем для функции  $m(u)$  функциональное уравнение

$$m \left( \frac{\sqrt{4a^2 + \frac{b^2}{1 - \frac{a^2}{c^2}}}}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \right) = m \left( \frac{b}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}} \right) \cdot \frac{1 + \frac{a^2}{c^2}}{1 - \frac{a^2}{c^2}}.$$

Это равенство должно соблюдаться тождественно при любых  $b$  и  $a$ . Положив, в частности,  $b=0$ , мы получим

$$m \left( \frac{2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \right) = m_0 \frac{1 + \frac{a^2}{c^2}}{1 - \frac{a^2}{c^2}}, \quad (6.10)$$

где  $m_0 = m(0)$  — постоянная величина, которую естественно называть массой покоя.

Для того чтобы получить окончательную функциональную зависимость  $m(u)$ , положим

$$\frac{2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}} = u.$$

Поделив обе части этого равенства на  $c$ , получим

$$\frac{\frac{2a}{c}}{1 + \frac{a^2}{c^2}} = \frac{u}{c}.$$

Прибавляя и вычитая обе части этого равенства из единицы, получим два равенства

$$\frac{\left(1 + \frac{a}{c}\right)^2}{1 + \frac{a^2}{c^2}} = 1 + \frac{u}{c}; \quad \frac{\left(1 - \frac{a}{c}\right)^2}{1 + \frac{a^2}{c^2}} = 1 - \frac{u}{c},$$

откуда, перемножая левые и правые части этих равенств и извлекая квадратный корень, будем иметь

$$\frac{1 - \frac{a^2}{c^2}}{1 + \frac{a^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}.$$

Внося это в равенство (6.10), мы получаем окончательно вид функциональной зависимости массы от скорости

$$m(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (7.10)$$

Итак, с ростом скорости тела масса его увеличивается по закону (7.10) и при приближении скорости к скорости света в вакууме возрастает неограниченно. Мы можем, однако, трактовать соотношение (7.10) и другим образом. Согласно этой формуле масса тела есть величина относительная: поскольку в разных системах отсчета скорость тела различна, то и масса тела на основании (7.10) различна в разных системах отсчета.

Инвариантной величиной является только масса покоя  $m_0$ .

С учетом формулы (7.10) мы можем записать выражение для релятивистского импульса в виде

$$\vec{p} = m(u) \cdot \vec{u} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (8.10)$$

Итак, в релятивистской области между импульсом тела и скоростью уже нет прямой пропорциональной зависимости, как в классической физике, а существует более сложная зависимость, выражаемая формулой (8.10).

## § 11. Релятивистский закон движения

Запишем теперь уравнение Ньютона в релятивистской области как закон изменения релятивистского импульса со временем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = \vec{F}. \quad (1.11)$$

В следующем параграфе мы докажем, что это уравнение инвариантно по отношению к преобразованиям Лорентца и, следовательно, удовлетворяет требованиям принципа относительности. Нетрудно видеть, кроме того, что только такой вид уравнения движения приводит к закону сохранения релятивистского импульса и при малых скоростях переходит в классический второй закон Ньютона.

Важнейшей особенностью уравнения (1.11), отличающей его от нерелятивистского уравнения Ньютона  $m \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}$ , является зависимость массы от скорости.

Мы видели в предыдущей главе, что скорость света  $c$  является предельной скоростью для всех реальных движений. Физическая причина этого выясняется в уравнении (1.11). Так как по мере приближения скорости тела  $u$  к скорости света в вакууме  $c$  масса тела  $\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$  неограни-

ченно возрастает, то и сила, нужная для ускорения тела до скорости  $c$ , должна была бы быть бесконечно большой.

Уравнение (1.11) позволяет легко найти выражение для кинетической энергии тела. По определению приращение кинетической энергии равно работе силы

$$dT = \vec{F} \cdot \vec{u} \cdot dt = \vec{u} \cdot d \left( \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right).$$

Выполняя дифференцирование, найдем

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot d \left( \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) &= m_0 \left[ \frac{u du}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \frac{u^3 du}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2} c^2} \right] = \\ &= \frac{m_0 du}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} \end{aligned}$$

(мы воспользовались здесь тем, что

$$\vec{u} d\vec{u} = u du = d \left( \frac{1}{2} u^2 \right).$$

Отсюда

$$dT = \frac{m_0 du}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

и, следовательно,

$$T = m_0 \int \frac{du}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + B,$$

где  $B$  — постоянная интегрирования.

Поскольку нас интересует кинетическая энергия тела, т. е. тот избыток энергии, которым обладает движущееся тело по сравнению с покоящимся, то мы должны считать  $T=0$  при  $u=0$ . Это дает

$$B = -m_0 c^2$$

и, следовательно, окончательно будем иметь

$$T = m_0 c^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right]. \quad (2.11)$$

Рассмотрим случай малых по сравнению с  $c$  скоростей и

разложим  $\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$  в ряд по степеням  $\frac{u^2}{c^2}$

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{u^4}{c^4} + \dots^1$$

<sup>1</sup> Ряд Тейлора для функции  $(1+x)^n$  имеет вид:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!} x + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots$$

Тогда выражение для кинетической энергии принимает вид

$$T = \frac{1}{2} m_0 u^2 + \frac{3}{8} \frac{m_0 u^4}{c^2} + \dots$$

Мы видим, что классическое выражение кинетической энергии  $\frac{m_0 u^2}{2}$  представляет собой первое приближение к истинной величине  $T$ , пригодное лишь при малых скоростях.

Уже при скорости  $u$  частицы, составляющей  $\frac{1}{10}$  скорости света, второе слагаемое составляет 0,75% от первого, а при  $u = \frac{1}{2} c$  релятивистская кинетическая энергия, вычисленная по формуле (2.11), превышает классическое значение  $\frac{m_0 u^2}{2}$  на 35%.

Нетрудно видеть, что при  $u \rightarrow c$  кинетическая энергия тела неограниченно возрастает.

Изучим теперь особенность релятивистской динамики на нескольких примерах.

В качестве первого примера рассмотрим процесс ускорения заряженной частицы с массой покоя  $m_0$  и зарядом  $q$  в однородном и постоянном электрическом поле с напряженностью  $\vec{E}$ .

Сила, действующая на частицу в электрическом поле, равна  $q\vec{E}$ . Будем считать, что начальная скорость частицы равна нулю ( $u_0 = 0$ ). Тогда в любой момент времени направление скорости будет совпадать с направлением поля и уравнение (1.11) может быть записано в скалярном виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = qE.$$

Интегрируя его в пределах от 0 до  $t$  (и учитывая, что  $u_0 = 0$ ), получим

$$\frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = qEt.$$

Наконец, решая последнее уравнение относительно скорости  $u$ , будем иметь

$$u = \frac{qEt}{\sqrt{1 + \left( \frac{qEt}{m_0 c} \right)^2}}. \quad (3.11)$$

Заметим, что величина  $\frac{qEt}{m_0}$ , стоящая в числителе, представляет собой произведение классического «ускорения»  $\frac{qE}{m_0}$  (вычисленного по формуле классической механики) на время  $t$ , т. е. скорость, которую приобрела бы частица за время  $t$  по законам классической механики

$$u_{\text{кл}} = \frac{qEt}{m_0}.$$

Тогда формула (3.11) может быть записана в виде

$$u = \frac{u_{\text{кл}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{u_{\text{кл}}}{c}\right)^2}}.$$

Мы видим, что благодаря возрастанию инертности со скоростью, скорость частицы  $u$  меньше, чем  $u_{\text{кл}}$ .

Для слабого поля и при малой длительности его действия (пока  $u_{\text{кл}} \ll c$ ) остается приближенно верным классический результат

$$u \approx u_{\text{кл}} = \frac{qEt}{m_0}.$$

В другом предельном случае — при сильном поле и большой длительности его действия (так, что  $u_{\text{кл}} \approx c$ ) — мы получаем естественный результат

$$u \approx c.$$

Однако, как и следует ожидать исходя из общих принципов теории, эта скорость может быть достигнута лишь в пределе (в бесконечно сильном поле или за бесконечно большое время). В реальном случае скорость частицы всегда остается меньше  $c$ .

В качестве второго примера рассмотрим упругий удар двух шаров одинаковой массы.

Пусть до удара шар  $B$  находится в покое, а шар  $A$  движется по направлению к нему со скоростью  $\vec{u}$ .

Если удар не центральный, то после столкновения шары разлетаются со скоростями  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$ , составляющими некоторый угол  $\alpha$  (рис. 22).

Нетрудно показать, что по законам классической механики этот угол должен быть равен  $\frac{\pi}{2}$ .

Действительно, законы сохранения импульса и кинетической энергии дают в этом случае равенства

$$m\vec{u} = m\vec{u}_1 + m\vec{u}_2;$$

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}$$

или

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2; \quad (4.11)$$

$$u^2 = u_1^2 + u_2^2. \quad (5.11)$$



Рис. 22.

Первое из этих равенств по теореме косинусов дает

$$u^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2 \cos \alpha. \quad (6.11)$$

Тогда, вычитая почленно левые и правые части равенств (6.11) и (5.11), получаем

$$2u_1u_2 \cos \alpha = 0;$$

$$\cos \alpha = 0;$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Посмотрим теперь, к какому результату приводят формулы релятивистской динамики.

Законы сохранения импульса и кинетической энергии при одинаковых массах шаров приводят нас к равенствам

$$\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0\vec{u}_1}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}} + \frac{m_0\vec{u}_2}{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}} \quad (7.11)$$

и

$$m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}} - 1 \right) + m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (8.11)$$

Рассмотрим два предельных случая: а) случай малых по сравнению с  $c$  скоростей; б) случай скоростей, весьма близких к  $c$ .

В случае малых по сравнению с  $c$  скоростей разложим

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ в ряд Тэйлора по степеням } \frac{u^2}{c^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{u^4}{c^4} + \dots$$

и сохраним в разложении импульса два первых члена, а в разложении кинетической энергии три первых члена.

Тогда будем иметь

$$\vec{p} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2}\right) \vec{u},$$

$$T = \frac{m_0 u^2}{2} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{u^2}{c^2}\right),$$

и равенства (7.11) и (8.11) примут вид (после сокращения на  $m_0$ )

$$\vec{u} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2}\right) = \vec{u}_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u_1^2}{c^2}\right) + \vec{u}_2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u_2^2}{c^2}\right) \quad (9.11)$$

$$u^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{u^2}{c^2}\right) = u_1^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{u_1^2}{c^2}\right) + u_2^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{u_2^2}{c^2}\right). \quad (10.11)$$

Возводя обе части равенства (9.11) в квадрат и отбрасывая малые величины второго порядка относительно  $\frac{u^2}{c^2}$ , получим

$$u^2 \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right) = u_1^2 \left(1 + \frac{u_1^2}{c^2}\right) + u_2^2 \left(1 + \frac{u_2^2}{c^2}\right) + 2u_1 u_2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{u_1^2 + u_2^2}{c^2}\right] \cos \alpha.$$

Вычитая теперь из левой и правой частей полученного равенства левую и правую части равенства (10.11), будем иметь

$$\frac{1}{4} \frac{u^4}{c^2} = \frac{1}{4} \frac{u_1^4}{c^2} + \frac{1}{4} \frac{u_2^4}{c^2} + 2u_1u_2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{u_1^2 + u_2^2}{c^2} \right] \cos \alpha,$$

откуда следует (если пренебречь слагаемым  $\frac{1}{2} \frac{u_1^2 + u_2^2}{c^2}$  по сравнению с единицей)

$$\cos \alpha = \frac{u^4 - u_1^4 - u_2^4}{8u_1u_2c^2}.$$

В том же приближении мы можем в последней формуле заменить  $u^2 \approx u_1^2 + u_2^2$ , после чего это соотношение примет окончательно следующий вид

$$\cos \alpha = \frac{u_1u_2}{4c^2}. \quad (11.11)$$

Мы видим, что в слабо релятивистской области  $\cos \alpha$  имеет малое положительное значение и, следовательно, угол разлета шаров  $\alpha$  немного меньше  $90^\circ$ .

В другом предельном случае, когда скорости  $u$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  весьма близки к  $c$ , величины:

$$\gamma = \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma_1 = \left( 1 - \frac{u_1^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma_2 = \left( 1 - \frac{u_2^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

очень малы по сравнению с единицей.

Если, например, скорость  $u$  меньше скорости света в вакууме на 0,01% ( $u = 0,9999c$ ), то

$$\gamma = \sqrt{1 - 0,9999^2} \cong \sqrt{1 - 0,9998} \cong 0,014.$$

Будем в этом случае вести расчет с точностью до малых величин первого порядка относительно  $\gamma$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ .

Закон сохранения кинетической энергии может быть записан для этого случая в виде

$$\frac{m_0c^2(1-\gamma)}{\gamma} = \frac{m_0c^2(1-\gamma_1)}{\gamma_1} + \frac{m_0c^2(1-\gamma_2)}{\gamma_2}$$

или после сокращения на  $m_0c^2$

$$\frac{1-\gamma}{\gamma} = \frac{1-\gamma_1}{\gamma_1} + \frac{1-\gamma_2}{\gamma_2}. \quad (12.11)$$

Для того чтобы приближенно записать закон сохранения импульса, выразим скорость  $u$  через величину  $\gamma$ . Из формулы  $\gamma = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$  имеем

$$u = c \sqrt{1 - \gamma^2},$$

откуда, пренебрегая малыми величинами второго порядка, получим

$$u \approx c.$$

Аналогично:

$$u_1 \approx c,$$

$$u_2 \approx c.$$

Тогда закон сохранения импульса запишется в виде

$$\vec{l} \frac{m_0 c}{\gamma} = \vec{l}_1 \frac{m_0 c}{\gamma_1} + \vec{l}_2 \frac{m_0 c}{\gamma_2},$$

где  $\vec{l}$ ,  $\vec{l}_1$ ,  $\vec{l}_2$  — единичные векторы, имеющие направления, совпадающие соответственно с направлениями векторов  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$  (см. рисунок 22).

После сокращения на  $m_0 c$  получим

$$\frac{\vec{l}}{\gamma} = \frac{\vec{l}_1}{\gamma_1} + \frac{\vec{l}_2}{\gamma_2}. \quad (13.11)$$

Возводя равенства (12.11) и (13.11) в квадрат и учитывая, что

$$\vec{l}_1 \vec{l}_2 = \cos \alpha, \text{ а } l_1^2 = l_2^2 = l^2 = 1,$$

получим с точностью до малых первого порядка

$$\frac{1 - 2\gamma}{\gamma^2} = \frac{1 - 2\gamma_1}{\gamma_1^2} + \frac{1 - 2\gamma_2}{\gamma_2^2} + 2 \frac{1 - \gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2}; \quad (14.11)$$

$$\frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{1}{\gamma_2^2} + 2 \frac{\cos \alpha}{\gamma_1 \gamma_2}. \quad (15.11)$$

Вычитая почленно равенство (14.11) из равенства (15.11), будем иметь (после сокращения на множитель 2)

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{\cos \alpha - 1 + \gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2},$$

откуда

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_2 \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma} \right),$$

но из равенства (12.11) имеем

$$\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma} = 1$$

и, следовательно,

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{2},$$

что с точностью до малых первого порядка дает

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha^2}{4} \approx \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2},$$

откуда

$$\alpha \approx \sqrt{2(\gamma_1 + \gamma_2)}.$$

Итак, в сильно релятивистском случае угол разлета шаров близок к нулю; оба шара должны двигаться после удара почти в первоначальном направлении.

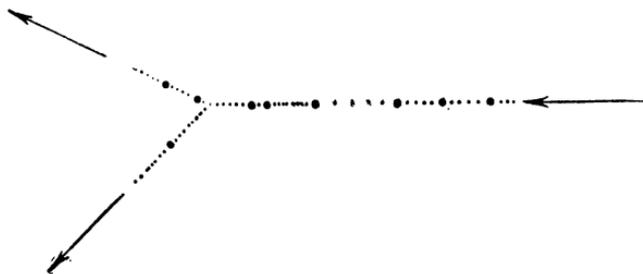


Рис. 23.

Эта особенность релятивистских соударений допускает простую экспериментальную проверку. Пропуская пучок быстрых электронов через камеру Вильсона, можно наблюдать в большом количестве трэки так называемых  $\delta$ -электронов, выбиваемых электронами пучка из атомов газа, находящегося в камере. Эти трэки имеют характерный вид «вилки» (рис. 23) — одна из линий, исходящих из точки, представляет собой след рассеянного электрона пучка, другая — след выбитого из атома. При достаточно большой скорости падающих электронов можно пренебречь энергией связи электрона в атоме и считать столкновение упругим, а также рассматривать атомный электрон до удара как покоящийся. Тогда процесс образования  $\delta$ -электронов полностью подходит под рассмотренную нами схему.

Изучая фотографии трэков  $\delta$ -электронов, нетрудно убедиться, что углы разлета для релятивистских электронов

действительно меньше  $90^\circ$ , причем чем больше скорость первичного электрона, тем ближе угол  $\alpha$  к нулю.

В качестве третьего примера рассмотрим ускорение заряженной частицы в циклотроне (рис. 24).

Как известно, циклотрон представляет собой два полых металлических полуцилиндра (дуанты циклотрона), находящиеся в магнитном поле, перпендикулярном к плоскости дуантов. К дуантам подводится переменное электрическое напряжение частоты  $\omega_0$ .

В промежутке между дуантами помещается источник заряженных частиц (ионов). Под действием электрического поля в зазоре частицы ускоряются и входят

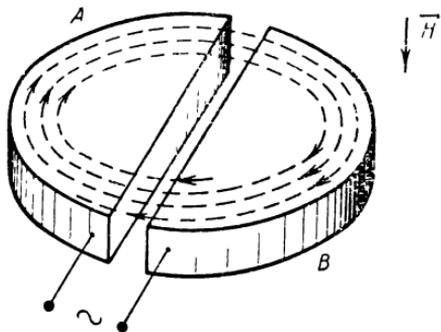


Рис. 24.

в один из дуантов, имея некоторую скорость  $u_0$ . Внутри дуанта электрическое поле отсутствует и частица движется под действием однородного магнитного поля с напряженностью  $\vec{H}$ .

Рассмотрим подробнее характер движения частицы внутри дуанта.

На частицу с зарядом  $q$  в магнитном поле действует, как известно, так называемая сила Лорентца, пропорциональная векторному произведению скорости на напряженность магнитного поля

$$\vec{F} = \frac{q}{c} [\vec{u}, \vec{H}].$$

Так как эта сила перпендикулярна к скорости частицы, то она не совершает над частицей работы, и поэтому энергия частицы и абсолютная величина скорости остаются неизменными при движении, а следовательно, и масса частицы  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$  будет величиной постоянной.

Релятивистское уравнение Ньютона для этой задачи будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} (m\vec{u}) = \frac{q}{c} [\vec{u}, \vec{H}]. \quad (16.11)$$

В проекциях на координатные оси это уравнение будет выглядеть следующим образом (мы выбираем направление магнитного поля за ось  $OZ$ , так что  $H_x = H_y = 0$ ,  $H_z = H$ ):

$$\frac{du_x}{dt} = \omega u_y, \quad \frac{du_y}{dt} = -\omega u_x, \quad \frac{du_z}{dt} = 0, \quad (17.11)$$

где

$$\omega = \frac{qH}{mc}.$$

Последнее уравнение этой системы сразу дает  $u_z = \text{const}$  и, рассматривая только частицы, движущиеся параллельно плоскости дуантов (частицы, движущиеся под углом к плоскости дуантов, вскоре попадут на крышки дуантов и не будут ускоряться), мы можем считать  $u_z = 0$ .

Для интегрирования первых двух уравнений системы (17.11) умножим второе из них на  $i$  и сложим с первым. Тогда получим

$$\frac{d}{dt}(u_x + iu_y) = -i\omega(u_x + iu_y),$$

откуда

$$u_x + iu_y = Ae^{-i\omega t},$$

где постоянная  $A$ , вообще говоря, есть величина комплексная и может быть записана в виде

$$A = u_0 \cdot e^{-i\alpha},$$

где  $u_0$  и  $\alpha$  — вещественные постоянные.

Тогда будем иметь

$$u_x + iu_y = u_0 e^{-i(\omega t + \alpha)} = u_0 [\cos(\omega t + \alpha) - i \sin(\omega t + \alpha)].$$

Отсюда, отделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{dx}{dt} = u_0 \cos(\omega t + \alpha); \\ u_y &= \frac{dy}{dt} = -u_0 \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned} \quad (18.11)$$

Мы видим, что  $u_0$  представляет собой абсолютную величину скорости

$$u_0 = \sqrt{u_x^2 + u_y^2},$$

которая остается постоянной при движении, а  $\alpha$  определяет направление начальной скорости

$$\operatorname{tg} \alpha = - \left( \frac{u_y}{u_x} \right)_{t=0}.$$

Интегрируя уравнения (18.11) еще раз, получим

$$x = \frac{u_0}{\omega} \cdot \sin(\omega t + \alpha) + x_0;$$

$$y = \frac{u_0}{\omega} \cos(\omega t + \alpha) + y_0,$$

где  $x_0$  и  $y_0$  — постоянные интегрирования. Отсюда, исключая время, получим

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{u_0^2}{\omega^2} = \left( \frac{mcu_0}{qH} \right)^2.$$

Итак, внутри дуанта ускоряемая частица движется по дуге окружности с радиусом  $R = \frac{mcu_0}{qH}$  и совершает пол-оборота по этой окружности за время

$$\tau = \frac{\pi R}{u_0} = \frac{\pi mc}{qH}.$$

Для того чтобы частица в циклотроне ускорялась, она должна вновь прийти в зазор в тот момент времени, когда электрическое поле в зазоре тоже изменит направление на обратное. Следовательно, частота обращения частицы в дуанте  $\omega = \frac{\pi}{\tau}$  должна совпадать с частотой переменного электрического поля  $\omega_0$ .

Это дает следующее условие синхронизма

$$\frac{qH}{mc} = \omega_0. \quad (19.11)$$

В области нерелятивистских скоростей, пока масса частицы  $m$  может считаться постоянной, этому условию можно удовлетворить, подбирая подходящие величины  $H$  и  $\omega_0$ .

Однако когда речь идет о достижении скоростей, близких к  $c$ , мы сталкиваемся с существенной трудностью: при каждом прохождении частицы через зазор скорость частицы увеличивается, а следовательно, увеличивается и масса

частицы  $\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ , и условие синхронизма (19.11) перестает выполняться.

Частица начинает приходить в зазор с запозданием, когда поле в зазоре не имеет максимальной величины. Это запаздывание накапливается и, наконец, частица начинает тормозиться.

Это кладет предел возможности ускорения частиц в циклотроне. Нетрудно понять, что этот предел особенно существен для легких частиц — электронов. В самом деле, если ускорить электрон до скорости, составляющей даже 90% скорости света (что заведомо невозможно в циклотроне, так как зависимость массы от скорости сказывается при значительно меньших скоростях), то его энергия будет составлять меньше 1 MeV<sup>1</sup>

$$T = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right) = \frac{9 \cdot 10^{-28} \cdot 9 \cdot 10^{20}}{1,6 \cdot 10^{-6}} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - 0,81}} - 1 \right)$$

$$T \approx 0,6 \text{ MeV.}$$

При ускорении же протона (масса которого в 1840 раз больше) до скорости, составляющей лишь 25% скорости света, его энергия будет равна по той же формуле около 30 MeV.

Мы видим, таким образом, что без учета особенностей релятивистской динамики невозможен правильный расчет ускорителей заряженных частиц, играющих столь важную роль в современной ядерной физике.

## § 12. Закон взаимной связи массы и энергии

В предыдущем параграфе мы рассматривали идеально упругий удар двух шаров. При таком ударе имеет место как сохранение полного импульса, так и сохранение суммарной кинетической энергии шаров.

<sup>1</sup> 1 электрон-вольт (1eV) — работа, которую совершает электрическое поле, перемещая электрон между 2-мя точками с разностью потенциалов в 1 V.

$$1 \text{ eV} = 4,8 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{1}{300} \text{ эрг} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг};$$

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ эрг.}$$

Рассмотрим теперь абсолютно неупругий удар, характеризующийся тем, что после удара сталкивающиеся тела движутся вместе как одно целое, с одной общей скоростью. Ограничимся для простоты рассмотрением удара двух шаров одинаковой массы и рассмотрим сначала картину удара с точки зрения классической механики Ньютона.

Пусть шары  $A$  и  $B$  с массой  $m$  движутся с одинаковыми по величине и противоположными по направлению скоростями навстречу друг другу ( $u_A = v$ ,  $u_B = -v$ ). Тогда после удара они образуют одно сложное тело  $C$  с массой  $m'$ , скорость которого равна нулю ( $u_C = 0$ ) (рис. 25).

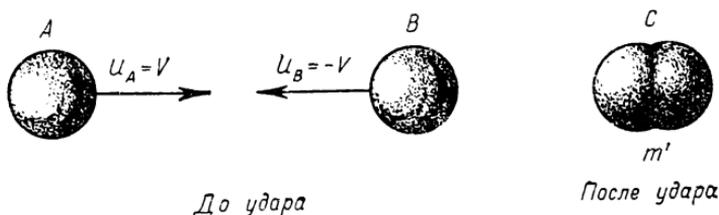


Рис. 25.

Нетрудно видеть, что закон сохранения импульса выполняется в этой системе отсчета автоматически: общий импульс до удара [ $m \cdot v + m \cdot (-v)$ ] и после удара ( $m' \cdot 0$ ) равен нулю.

Перейдем теперь к системе отсчета  $k'$ , движущейся слева направо со скоростью  $v$ .

На основании классической теоремы сложения скоростей

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}.$$

В этой системе отсчета шар  $A$  имеет до удара скорость  $u'_A = v - v = 0$ , шар  $B$  — скорость  $u'_B = -v - v = -2v$  и сложное тело  $C$  — скорость  $u'_C = 0 - v = -v$  (рис. 26).

Закон сохранения импульса, записанный в системе  $k'$ , дает (напоминаем, что масса в классической механике инвариантна) —  $m \cdot 2v = -m' \cdot v$ , откуда следует  $m' = 2m$ .

Это равенство выражает почти очевидный в классической физике закон сохранения массы — сумма масс шаров  $A$  и  $B$  до удара равна массе сложного тела  $C$  после удара.

Итак, в классической механике при неупругом соударении шаров имеют место два закона сохранения — закон

сохранения импульса и закон сохранения массы. Нетрудно, однако, видеть, что в отличие от упругого удара закон сохранения кинетической энергии в этом случае не имеет места.

В самом деле, в системе отсчета  $k$  до удара шары имеют кинетическую энергию  $2 \cdot \frac{mv^2}{2} = mv^2$ , а после удара тело  $C$  не обладает кинетической энергией — кинетическая энергия

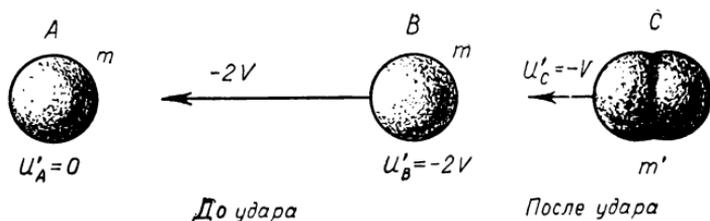


Рис. 26.

уменьшается на величину  $mv^2$ . (То же самое имеет место и в системе отсчета  $k'$  — до удара кинетическая энергия равна:

$$\frac{m(2v)^2}{2} = 2mv^2,$$

после удара

$$\frac{2mv^2}{2} = mv^2.$$

Убыль кинетической энергии будет равна  $2mv^2 - mv^2 = mv^2$  так же, как и в системе  $k$ .)

С более общей точки зрения это значит, что при рассматриваемом неупругом ударе происходит превращение энергии макроскопического движения шаров в энергию теплового движения  $mv^2 = Q$ . Общая энергия в изолированной системе, состоящей из двух шаров  $A$  и  $B$ , сохраняется и при неупругом ударе.

Однако в рамках классической физики этот общий закон сохранения энергии не может быть выражен в механических терминах (массы, скорости и т. д.), так как все другие виды энергии, кроме механической (внутренняя, электромагнитная, ядерная и т. д.), выражаются через свои специфические параметры (температура, теплоемкость, электроемкость, напряженности полей и т. д.).

Рассмотрим теперь картину неупругого удара с точки зрения релятивистской механики.

Обозначим:  $m_0$  — массы покоя шаров  $A$  и  $B$  и  $m'_0$  — массу покоя сложного тела  $C$ , возникшего в результате «слипания» шаров. Так же, как и в нерелятивистском случае, закон сохранения импульса в системе  $k$ , где шары  $A$  и  $B$  движутся навстречу друг другу с равными скоростями ( $u_A = v$ ,  $u_B = -v$ ), а тело  $C$  после удара покоится ( $u_C = 0$ ), выполняется автоматически. Перейдем опять к системе отсчета  $k'$ , движущейся направо со скоростью  $v$ . На основании релятивистской теоремы сложения скоростей

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} - \vec{v}}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

в системе  $k'$  скорости тел будут таковы:

$$u'_A = \frac{v - v}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0;$$

$$u'_B = \frac{-v - v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = -\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}};$$

$$u'_C = \frac{0 - v}{1 - \frac{0 \cdot v}{c^2}} = -v.$$

Закон сохранения релятивистского импульса  $p = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$

в системе  $k'$  дает:

$$-\frac{m_0 \cdot \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{4v^2}{c^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^2}}} = -\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

откуда путем несложных алгебраических преобразований получим

$$m'_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.12)$$

Итак, мы видим, что закон сохранения для масс покоя при неупругом ударе не имеет места (чего, собственно говоря, и следовало ожидать), однако равенство (1.12) показывает, что закон сохранения релятивистской массы, зависящий от скорости, остается верным. В самом деле, выражение

$\sqrt{\frac{2m_0}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  есть суммарная масса шаров  $A$  и  $B$ , движущихся (в системе  $k$ ) со скоростью  $v$ , а  $m'_0$  есть масса тела  $C$ , покоящегося в той же системе и, следовательно, равенство (1.12) может быть записано в виде

$$m_C = m_A + m_B.$$

Нетрудно видеть, что закон сохранения кинетической энергии не выполняется при неупругом ударе и в релятивистском случае.

В самом деле, в системе  $k$  до удара суммарная кинетическая энергия шаров  $A$  и  $B$  равна

$$2T(v) = 2m_0 c^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right],$$

в то время как после удара кинетическая энергия тела  $C$  равна нулю.

Следовательно, при ударе кинетическая энергия шаров превращается во внутреннюю энергию. (Нетрудно проверить, что такой же результат мы имеем и в системе  $k'$ .)

Равенство (1.12) приводит к следующему важнейшему следствию. Вычтем из обеих частей его по  $2m_0$ , тогда получаем

$$m'_0 - 2m_0 = 2m_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

или

$$m'_0 - 2m_0 = \frac{2T(v)}{c^2}. \quad (2.12)$$

Итак, мы видим, что при неупругом ударе происходит увеличение запаса внутренней энергии (полной энергии за вычетом энергии макроскопического движения тела как

целого) на  $2T$  и оно сопровождается увеличением массы покоя на  $\frac{2T}{c^2}$ . Это приводит нас к выводу, что масса покоя является мерой внутренней энергии в теле, а именно запас внутренней энергии в теле пропорционален массе покоя этого тела с коэффициентом пропорциональности  $c^2$

$$E_{вн} = m_0 c^2. \quad (3.12)$$

Полученный нами результат допускает дальнейшее обобщение. Полная энергия тела складывается, очевидно, из внутренней энергии и кинетической энергии тела как целого

$$E = E_{вн} + T(v) = m_0 c^2 + T(v).$$

Равенство (2.12), которое может быть переписано в виде

$$m'_0 c^2 = 2 [m_0 c^2 + T(v)]$$

или в виде

$$m'_0 c^2 + T(0) = 2 [m_0 c^2 + T(v)], \quad [T(0) = 0],$$

представляет собой тогда закон сохранения полной энергии

$$E = m_0 c^2 + T(v).$$

Выражение полной энергии  $E$  может быть далее преобразовано следующим образом:

$$E = m_0 c^2 + T(v) = m_0 c^2 + m_0 c^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right] = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

и так как выражение

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m$$

дает нам величину релятивистской массы движущегося тела, то окончательно имеем:

$$E = mc^2. \quad (4.12)$$

Итак, мы приходим к важнейшему выводу: масса тела является мерой запаса полной энергии тела. Всякое изменение энергии тела на величину  $\Delta E$  влечет за собой изменение массы тела на  $\Delta m$ , причем

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}. \quad (5.12)$$

Равенства (4.12) и (5.12) выражают один из важнейших законов современной физики — закон взаимной связи массы и энергии.

Ввиду фундаментальной важности этого закона, прежде чем переходить к анализу его физического содержания, продемонстрируем его универсальность еще на одном примере. Покажем, что лучистая энергия обладает массой, причем в согласии с формулой (4.12) масса излучения равна его энергии, деленной на  $c^2$ .

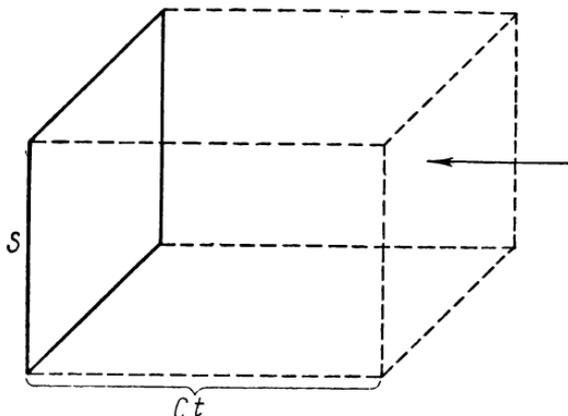


Рис. 27.

Согласно электромагнитной теории света, излучение, падающее на любую площадку перпендикулярно к ее поверхности, оказывает на эту площадку давление, численно равное энергии излучения, приходящейся на единицу объема

$$p' = \frac{E}{V}.$$

Отсюда непосредственно следует, что излучение обладает импульсом (количеством движения), который нетрудно найти. Пусть излучение падает на площадку перпендикулярно к ее поверхности (рис. 27).

Сила, действующая на площадку, равна  $p'S$ , причем по третьему закону Ньютона с такой же силой площадка действует на излучение.

По второму закону Ньютона произведение силы  $p'S$  на время ее действия равно изменению количества движения излучения за единицу времени

$$p'St = \Delta p.$$

Будем для простоты считать площадку абсолютно черной, тогда после поглощения излучения его импульс становится равным нулю и предыдущее равенство можно записать в виде

$$p' St = p,$$

где  $p$  — импульс излучения, падающего на площадку за время  $t$ .

Подставляя теперь  $p' = \frac{E}{V}$  и учитывая, что объем излучения, поглощенного площадкой за время  $t$ , равен  $Sc t$  (см. рис. 27), получим

$$p = p' St = \frac{E}{V} St = \frac{ESt}{cSt}$$

или окончательно

$$p = \frac{E}{c}.$$

Рассмотрим теперь следующий пример, указанный еще Эйнштейном.

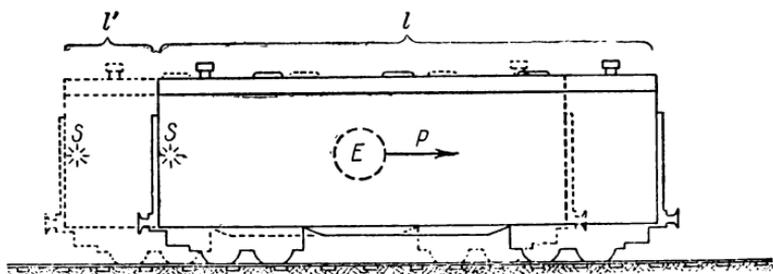


Рис. 28.

Пусть имеется вагон с массой  $M$  и длиной  $l$ , находящийся первоначально в покое (рис. 28), и пусть в некоторый момент времени источник электромагнитных волн  $S$ , находящийся на левой его стенке, излучает в направлении к правой стенке порцию лучистой энергии  $E$ , обладающую, как мы видели, импульсом  $p = \frac{E}{c}$ . По закону сохранения импульса вагон приобретет при этом скорость  $v$ , направленную в противоположную сторону и определяемую равенством

$$Mv = p$$

или

$$Mv = \frac{E}{c}. \quad (6.12)$$

Вагон будет двигаться с этой скоростью до тех пор, пока порция излучения не дойдет до противоположной стенки, т. е. в течение времени  $t = \frac{l}{c}$ . По прошествии этого времени излучение будет поглощено правой стенкой, вагон получит толчок в противоположную сторону и остановится. В конце движения вагон с массой  $M$  переместится таким образом на расстояние  $l'$ , равное

$$l' = vt = \frac{vl}{c}.$$

Так как, однако, под действием внутренних сил центр тяжести системы вагон — излучение должен остаться на месте, мы вынуждены приписать излучению некоторую массу  $m$ . Так как эта масса переместилась вправо на расстояние от левой до правой стенки вагона, то, для того чтобы центр тяжести системы остался на месте, должно выполняться равенство

$$Ml' = ml$$

или

$$M \frac{vl}{c} = ml.$$

Сокращая обе части равенства на  $l$  и подставляя значение произведения  $Mv$  из закона сохранения импульса (6.12), получим окончательно

$$m = \frac{E}{c^2}.$$

Итак, закон взаимной связи массы и энергии действительно оказывается законом универсальным — всякая материя (будь то вещество в обычном смысле слова или излучение), обладающая энергией  $E$ , обладает тем самым и массой  $m$ , равной  $\frac{E}{c^2}$ .

Перейдем теперь к более подробному анализу физического содержания этого закона.

Полезно из методических соображений по аналогии с разделением полной энергии на внутреннюю энергию  $E_{\text{вн.}}$

и кинетическую энергию  $T$  ввести деление полной массы на массу покоя  $m_0$  и кинетическую массу  $m_k$ , равную:

$$m_k = m - m_0 = m_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

Тогда, умножая  $m_0$  и  $m_k$  на  $c^2$ , мы получим

$$m_0 c^2 = E_{\text{вн}};$$

$$m_k c^2 = T(u).$$

Отметим теперь глубокое отличие в трактовке соударений классической физикой и релятивистской, заключающееся в следующем. В классической физике приходится различать упругие удары, при которых выполняется как закон сохранения количества движения, так и закон сохранения кинетической энергии, и неупругие удары, при которых имеет место первый закон, но кинетическая энергия не сохраняется, а частично (или полностью) переходит в другие формы.

В противоположность этому в релятивистской динамике такая граница между упругими и неупругими процессами является в значительной степени условной. В самом деле, при любых процессах, как упругих так и неупругих, сохраняется величина полной энергии, которая в релятивистской физике определяется чисто механическим параметром — полной массой тела.

Отличие упругого удара от неупругого в релятивистской механике сводится к тому, что при упругом ударе сохраняются порознь и энергия покоя (внутренняя энергия) и кинетическая энергия, кроме того, сохраняются порознь и масса покоя и кинетическая масса, в то время как при неупругом ударе часть кинетической энергии превращается во внутреннюю энергию (в тепло) и соответственно этому возрастает масса покоя и уменьшается кинетическая масса.

Мы уже видели, что теория относительности внесла существенные изменения в понятие массы тела: масса тела, как характеристика его инертности, оказалась величиной не постоянной, как это считалось в классической физике, а зависящей от скорости.

Мы можем сформулировать это обстоятельство следующим образом: чем больше кинетическая энергия тела, тем больше и его масса.

Теперь мы обнаруживаем нечто большее: закон взаимной связи массы и энергии показывает, что масса зависит не только от энергии движения тела, но и от запаса внутренней энергии. Это значит, например, что сжатая или растянутая пружина имеет массу большую, чем ненапряженная пружина, что нагретое тело тяжелее, чем холодное, намагниченный кусок железа тяжелее, чем ненамагниченный, и т. д. Мы видим, таким образом, что в отличие от классической физики в теории относительности существует общее выражение для запаса энергии тела, независимо от того, из каких видов энергии этот запас складывается (механическая, электромагнитная, внутриядерная и т. д.) — общая энергия тела или системы тел пропорциональна общей массе.

Обратимся к вопросу об экспериментальной проверке закона взаимной связи массы и энергии. В эпоху создания теории относительности казалось, что такая возможность исключена или, во всяком случае, является делом далекого будущего.

В самом деле, изменения массы, связанные с изменениями энергии формулой

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2},$$

благодаря громадной величине знаменателя ( $9 \cdot 10^{20} \text{ см}^2/\text{сек}^2$ ) чрезвычайно малы при обычных макроскопических процессах, с которыми мы имеем дело в жизни и в технике.

Проиллюстрируем это несколькими примерами.

1) Пусть ракета имеет массу покоя 10 тонн и скорость 8 км/сек. Подсчитаем, каково будет увеличение массы (кинетическая масса), возникающее при движении ракеты.

Имеем  $u = 8 \cdot 10^5 \text{ см/сек}$ ;  $m_0 \approx 10^7 \text{ г}$ . Так как  $u \ll c$ , то при вычислении кинетической энергии мы можем пользоваться классической формулой:

$$T = \frac{m_0 u^2}{2}.$$

Вычисляя  $\Delta m$  по формуле (5.12), получим

$$\Delta m = \frac{T}{c^2} = \frac{m_0 u^2}{2c^2} = 0,5 \cdot 10^7 \left( \frac{8 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^{10}} \right)^2 \text{ г} \cong 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ г},$$

2) Найдем, насколько увеличивается масса 1 литра воды при нагревании от 0 до  $100^\circ \text{C}$ . Так как для нагревания потребуется 100 ккал, то увеличение внутренней энергии, выраженное в CGS системе, будет составлять

$$\Delta E = 10^5 \cdot 4,19 \cdot 10^7 \text{ эрг} = 4,19 \cdot 10^{12} \text{ эрг.}$$

Отсюда

$$\Delta m = \frac{4,19 \cdot 10^{12}}{9 \cdot 10^{20}} \text{ г} = 0,47 \cdot 10^{-8} \text{ г.}$$

3) Пусть пружина с коэффициентом жесткости  $k=100$  кг/см сжимается так, что ее длина уменьшается на  $\Delta x=1$  см. Так как потенциальная энергия сжатой пружины равна  $\frac{k\Delta x^2}{2}$ , то прирост массы пружины составляет

$$\Delta m = \frac{k\Delta x^2}{2c^2} = \frac{100 \cdot 9,8 \cdot 10^5 \cdot 1^2}{2 \cdot 9 \cdot 10^{20}} \text{ г} = 0,54 \cdot 10^{-13} \text{ г.}$$

4) Найдем, какому изменению массы соответствует энергия, вырабатываемая за 1 час Куйбышевской ГЭС имени В. И. Ленина. При мощности в  $2,5 \cdot 10^6$  квт  $= 2,5 \cdot 10^{16}$  эрг/сек за час будет отдана потребителям энергия, равная

$$\Delta E = 2,5 \cdot 10^{16} \cdot 3600 \text{ эрг} = 9 \cdot 10^{19} \text{ эрг,}$$

и соответствующая этой энергии масса

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{9 \cdot 10^{19}}{9 \cdot 10^{20}} \text{ г} = 0,1 \text{ г.}$$

Итак, за 1 час работы масса всех механизмов, потребляющих энергию ГЭС, увеличится на 0,1 г (мы пренебрегаем при этом потерями энергии при передаче).

Нетрудно видеть, что во всех рассмотренных примерах изменение массы лежит далеко за пределами точности эксперимента.

Перейдем теперь от земных явлений к астрономии и посмотрим, каковы по порядку величины изменения массы, связанные с излучением звезд.

Рассмотрим в качестве примера излучение Солнца. Из астрономических наблюдений хорошо известна так называемая солнечная постоянная, т. е. количество энергии, приходящей от Солнца за единицу времени на каждый квадратный сантиметр границы земной атмосферы, перпендикулярный солнечным лучам. Она примерно равна  $2 \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \cdot \text{мин}} \cong 1,4 \cdot 10^6 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}}$ .

Отсюда полная энергия, излучаемая Солнцем за 1 сек., получается в результате умножения этой величины на площадь поверхности сферы с радиусом, равным среднему расстоянию от Земли до Солнца ( $R=150 \cdot 10^6 \text{ км} = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ см}$ )

$$\Delta E = 1,4 \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot (1,5 \cdot 10^{13})^2 \text{ эрг} \approx 4 \cdot 10^{33} \text{ эрг.}$$

Следовательно, Солнце ежесекундно теряет вследствие излучения массу, равную

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{4 \cdot 10^{33}}{9 \cdot 10^{20}} \approx 4,4 \cdot 10^{12} \text{ г} = 4,4 \cdot 10^6 \text{ тонн!}$$

Однако, несмотря на всю грандиозность этой цифры с точки зрения земного масштаба, по сравнению с полной массой Солнца ( $2 \cdot 10^{27}$  тонн) эта потеря ничтожно мала. Нетрудно видеть, что даже за время в 5 000 лет (примерная давность первых астрономических наблюдений) масса Солнца уменьшилась вследствие излучения на  $\sim 7 \cdot 10^{15}$  тонн, т. е. меньше, чем на одну триллионную долю ( $\frac{7 \cdot 10^{15}}{2 \cdot 10^{27}} = 0,35 \cdot 10^{-12}$ ), что естественно практически не может сказаться на законах движения планет.

Тем не менее современная физика обладает совершенно убедительными средствами экспериментальной проверки закона взаимной связи массы и энергии. Уже в первой своей работе, посвященной теории относительности, Эйнштейн высказал мысль о том, что такая проверка станет возможной в связи с изучением естественных радиоактивных превращений атомных ядер, при которых выделение энергии чрезвычайно велико даже при малых количествах вещества. В наши дни, когда ядерные реакции прочно вошли в арсенал современной науки и техники и становятся важнейшим источником энергии (ядерные реакторы, атомные и водородные бомбы), не только стала возможной экспериментальная проверка закона взаимной связи массы и энергии, но и, наоборот, этот закон является надежным средством расчета энергии, выделяемой при ядерных превращениях.

Для того чтобы понять это, отметим, что существует принципиальное отличие в трактовке законов сохранения массы и энергии в классической физике и в физике релятивистской.

В классической физике мы имеем два фундаментальных закона природы — открытый Ломоносовым (и несколько позже Лавуазье) закон сохранения массы (называемый обыч-

но законом сохранения вещества) и закон сохранения энергии, открытый в XIX в. в результате работ Майера, Гельмгольца и др.

Согласно первому из этих законов в замкнутой системе тел при любых физических и химических процессах остается неизменной масса системы

$$m = \text{const.} \quad (7.12)$$

Согласно второму закону в системе тел, находящейся в консервативном (независящем от времени) поле, при любых физических и химических процессах остается неизменной полная энергия системы

$$E = \text{const.} \quad (8.12)$$

В классической физике эти два закона являются совершенно независимыми друг от друга, так как величина массы не определяет величину энергии и наоборот. Более того, можно легко указать такие случаи, когда закон сохранения массы с точки зрения классической физики имеет место, а величина энергии является переменной (например, система зарядов в переменном электрическом поле).

В классической физике существует важное различие в формулировке закона сохранения массы (7.12) и закона сохранения энергии (8.12).

С точки зрения классической механики масса является величиной аддитивной, т. е. масса системы равна сумме масс тел, составляющих эту систему.

Поэтому закон сохранения массы в классической физике может быть сформулирован как закон сохранения суммы масс: в замкнутой системе тел сумма масс тел, вступивших в реакцию, равна сумме масс тел, возникших в результате реакции

$$\sum_i m_i = \sum_i m'_i. \quad (8.12)$$

В противоположность этому энергия не является величиной аддитивной: энергия системы не равна сумме энергии тел, составляющих эту систему, так как в общем случае существует еще энергия взаимодействия тел.

Энергия системы тел выражается формулой

$$E = \sum_i E_i + W,$$

где величины  $E_i$  представляют собой энергии составных частей системы, а  $W$  — энергию их взаимодействия.

Например, энергия системы из двух электрических зарядов  $q_1$  и  $q_2$  складывается из энергии первого заряда  $E_1$ , энергии второго заряда  $E_2$  и энергии их взаимодействия  $W$ :

$$W = \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}}; \quad E = E_1 + E_2 + \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}}.$$

Нетрудно при этом видеть, что энергия системы может быть как больше, так и меньше суммы энергий ее частей, так как энергия взаимодействия может быть и положительной и отрицательной.

Так, например, если заряды  $q_1$  и  $q_2$  одного знака, то энергия взаимодействия  $\frac{q_1 q_2}{r_{1,2}}$  положительна и  $E > E_1 + E_2$ .

Физически это значит, что в системе частиц, между которыми действуют силы отталкивания, при дроблении системы на части (при разлете частиц) совершается работа за счет уменьшения энергии.

Наоборот, если заряды  $q_1$  и  $q_2$  противоположного знака, то энергия взаимодействия отрицательна и  $E < E_1 + E_2$ . В системе частиц, между которыми действуют силы притяжения, для дробления системы на части работу должны совершить внешние силы, и она идет на увеличение запаса энергии.

Таким образом, закон сохранения энергии в общем случае не может быть сформулирован как закон сохранения суммы энергий, составляющих систему тел (за исключением специального случая системы невзаимодействующих частиц — идеального газа).

Рассмотрим теперь законы сохранения массы и энергии с точки зрения релятивистской механики. Мы видим прежде всего, что в теории относительности существует единый закон сохранения энергии-массы. Действительно, поскольку между массой и энергией тела (или системы тел) существует соотношение  $E = mc^2$ , то из закона сохранения массы замкнутой системы  $m = \text{const}$  вытекает и закон сохранения энергии  $E = \text{const}$  и наоборот.

Однако содержание релятивистского закона сохранения массы значительно глубже, чем в классической физике.

Заметим прежде всего, что масса системы согласно теории относительности отнюдь не равна сумме масс составляющих ее тел. В самом деле, из равенства

$$E = \sum_i E_i + W,$$

поделив обе части его на  $c^2$ , получим

$$m = \sum_i m_i + \frac{W}{c^2},$$

где  $m$  — масса системы, а  $m_i$  — массы изолированных тел, составляющих систему. Заметим, что масса системы может быть и больше и меньше суммы масс, составляющих ее тел.

В частности, масса системы одноименных зарядов больше, а масса системы разноименных зарядов меньше суммы масс зарядов.

Рассмотрим теперь подробнее следующий практически весьма важный случай. Пусть имеется устойчивая система частиц, обладающая известным запасом прочности (например, кристалл, атом, атомное ядро и т. д.).

Для того чтобы разделить такую систему на составные части (разрушить кристаллическую решетку, т. е. расплавить или испарить кристалл; отделить электроны от атома; разбить ядро на протоны и нейтроны и т. д.), необходимо совершить некоторую работу, которую принято называть энергией связи системы. Эта работа, очевидно, тратится на увеличение запаса энергии частиц, составляющих систему. Поэтому сумма энергий разделенных частиц в этом случае больше энергии системы на величину энергии связи

$$\sum_i E_i = E + E_{\text{св.}}$$

Поделив последнее равенство на  $c^2$ , получим тогда

$$\sum_i m_i = m + \frac{E_{\text{св.}}}{c^2}.$$

Сумма масс разделенных частиц больше массы системы на величину энергии связи, деленную на  $c^2$ . Избыток суммы масс частиц над массой системы принято называть дефектом масс. Обозначая его  $\Delta m$ , будем иметь

$$\Delta m = \sum_i m_i - m = \frac{E_{\text{св.}}}{c^2}.$$

Мы видим, что чем прочнее система, чем больше ее энергия связи, тем больше дефект массы. Для химических соединений, обладающих сравнительно небольшой прочностью, энергия связи сравнительно мала и дефекты масс оказываются

лежащими далеко за пределами возможности экспериментального обнаружения. Так, например, чтобы разложить 1 г воды (путем электролиза) на водород и кислород, надо затратить энергию, равную  $7,6 \text{ ккал} = 0,32 \cdot 10^{12} \text{ эрг}$ . Энергию связи одной молекулы воды получим, поделив это число на количество молекул воды в 1 г, т. е. на  $\frac{6,023 \cdot 10^{23}}{18}$ . Она оказывается равной

$$E_{\text{св}} = \frac{0,32 \cdot 10^{12}}{6,023 \cdot 10^{23}} \cdot 18 \approx 10^{-11} \text{ эрг} \sim 6 \text{ eV}.$$

Отсюда находим дефект массы

$$\Delta m = \frac{10^{-11}}{9 \cdot 10^{20}} \approx 10^{-32} \text{ г}.$$

С совершенно иным положением дел мы сталкиваемся, однако, в ядерной физике.

Найдем, например, энергию связи ядра гелия, состоящего из двух протонов и двух нейтронов. Из масс-спектрографических наблюдений известны с большой степенью точности массы атомов водорода, гелия и масса нейтронов. Они равны (в атомных единицах массы)

$$m_{\text{He}} = 4,00390 \text{ ат. ед. массы};$$

$$m_{\text{H}} = 1,008123 \text{ ат. ед. массы};$$

$$m_{\text{n}} = 1,00893 \text{ ат. ед. массы}.$$

Отсюда дефект массы равен

$\Delta m = -4,00390 + 2 \cdot 1,008123 + 2 \cdot 1,00893 = 0,03 \text{ ат. ед. массы}$ , так как атомная единица массы равна  $1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}$ , то

$$\Delta m = 4,98 \cdot 10^{-26} \text{ г}.$$

Умножая на  $c^2$ , получим величину энергии связи

$$E_{\text{св}} = 4,98 \cdot 10^{-26} \cdot 9 \cdot 10^{20} \text{ эрг} = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ эрг} \approx 28 \text{ MeV}.$$

Сравнивая этот результат с энергией связи молекулы воды, мы видим, что атомные ядра в миллионы раз прочнее молекул химических соединений.

Для того чтобы представить себе масштаб ядерных энергий, заметим, что для расщепления 1 г гелия на протоны и нейтроны надо затратить энергию, равную

$$E = 4,5 \cdot 10^{-5} \frac{6,023 \cdot 10^{23}}{4} \text{ эрг} = 6,8 \cdot 10^{18} \text{ эрг} = 6,8 \cdot 10^{11} \text{ дж} = \\ = 190000 \text{ квт-ч}.$$

Итак, сам факт несовпадения масс ядер с суммой масс нейтронов и протонов, составляющих ядро, с одной стороны, подтверждает закон взаимной связи массы и энергии, и, с другой стороны, свидетельствует о колоссальной прочности ядер атомов.

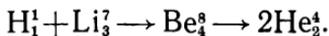
Точное экспериментальное подтверждение закона взаимной связи массы и энергии дает нам изучение ядерных реакций. Ядерные реакции могут протекать как с выделением, так и с поглощением энергии.

Очевидно, если сумма масс ядер, вступивших в реакцию, превышает сумму масс ядер, возникающих в результате реакции, то в ходе реакции масса покоя ядер частично превращается в кинетическую массу и соответственно энергия покоя — в кинетическую энергию возникших ядер. Такая реакция сопровождается выделением энергии.

На основании закона взаимной связи массы и энергии можно легко подсчитать выделение энергии, умножив убыль массы покоя ядер на  $c^2$ .

Рассмотрим следующую ядерную реакцию, осуществленную физиками Кокрофтом и Уолтоном в 1931 г. с помощью сконструированного ими ускорителя элементарных заряженных частиц (трубка Кокрофта и Уолтона). Поток быстрых протонов, ускоренных в трубке Уолтона, направляется на мишень из лития, помещенную в камере Вильсона. Ядро лития, захватывая протон, превращается в неустойчивое ядро бериллия, которое затем распадается на 2 ядра гелия (2  $\alpha$ -частицы), разлетающиеся с очень большими скоростями под углом, близким к  $180^\circ$  (рис. 29).

Эта реакция может быть записана следующим образом <sup>1</sup>



Измеряя длину пробега возникающих  $\alpha$ -частиц, удалось установить, что их суммарная кинетическая энергия равна  $17,2 \text{ MeV}$ . Следовательно, при изучаемой реакции кинетическая энергия возникает за счет такого же уменьшения внутренней энергии ядер.

<sup>1</sup> Мы пользуемся здесь общепринятым обозначением атомных ядер  $X_Z^A$ . Верхний индекс  $A$  есть округленная до целого числа масса ядра в атомных единицах (или так называемое массовое число), нижний индекс  $Z$  — порядковый номер элемента в системе Менделеева, выражающий заряд ядра (если за единицу принять заряд электрона). Например, обозначение  $\text{Li}_3^7$  означает, что порядковый номер  $\text{Li}$  в таблице Менделеева равен 3, а массовое число 7.

На основании закона взаимной связи массы и энергии мы должны ожидать, что масса покоя ядер при этой реакции должна уменьшиться на величину

$$\Delta m = \frac{17,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{20}} \text{ э} = 3,06 \cdot 10^{-26} \text{ э},$$

что в относительных атомных единицах массы составляет

$$\Delta m = 0,01843 \text{ ат. ед. массы.}$$

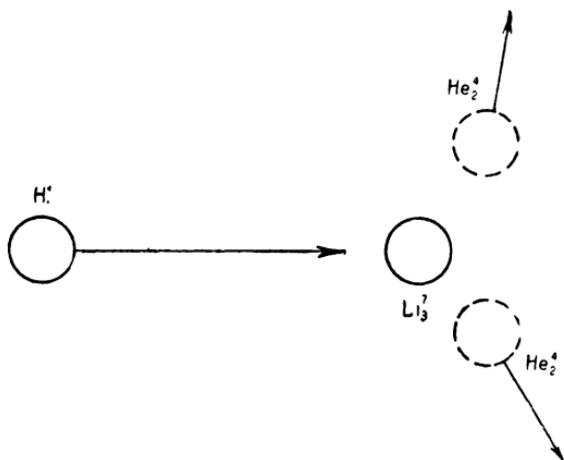


Рис. 29.

С другой стороны, из масс-спектрографических измерений известно, что:

$$\begin{aligned} m_{\text{H}} &= 1,008123, \\ m_{\text{Li}} &= 7,01822, \\ m_{\text{He}} &= 4,0039. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что изменение массы покоя ядер в результате реакции равно

$$\Delta m = 1,008123 + 7,01822 - 2 \cdot 4,0039 = 0,01854 \text{ ат. ед. массы,}$$

что находится в весьма хорошем согласии с данными опыта. Эксперимент Кокрофта и Уолтона явился первой экспериментальной проверкой закона взаимной связи массы и энергии. В дальнейшем изучение целого ряда других ядерных реакций дало еще более убедительные свидетельства его надежности.

В заключение рассмотрим с точки зрения закона взаимной связи массы и энергии две ядерные реакции, являющиеся основой современной техники использования внутриядерной энергии.

1) Деление ядер урана.

Под действием нейтронов ядра элемента урана ( $U_{92}^{235}$ ) испытывают деление на два осколка, представляющие собой ядра элементов средней части периодической системы. При этом выбрасывается в среднем 2—3 новых нейтрона, благодаря чему реакция деления (при соблюдении определенных условий) может протекать, как самоподдерживающаяся, или цепная, реакция. Она используется для получения энергии в так называемых ядерных реакторах и в атомных бомбах.

Мы можем грубо оценить выход энергии при одном акте реакции деления следующим образом.

Экспериментально установлено, что энергия связи, приходящаяся на одну ядерную частицу, в ядрах средней части периодической системы составляет около  $8,5 \text{ MeV}$ , в то время как для урана она падает до  $7,5 \text{ MeV}$ . Поэтому при каждом акте реакции деления энергия покоя ядер уменьшается, а кинетическая энергия ядер-осколков увеличивается на величину:

$$(8,5 - 7,5) \cdot 235 \text{ MeV} = 235 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ эрг} \cong 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ эрг.}$$

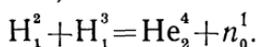
В расчете на 1 г урана мы получим выделение энергии (в основном в виде тепла), равное

$$\Delta Q = \frac{3,8 \cdot 10^{-4} \cdot 6 \cdot 10^{23}}{235 \cdot 4,19 \cdot 10^{10}} \text{ ккал} = 2,3 \cdot 10^7 \text{ ккал.}$$

Если принять, что теплотворная способность угля равна  $7000 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}$ , то 1 г урана эквивалентен примерно 3 т угля.

2) При определенных условиях (в частности, при высоких температурах — порядка  $10^7 \text{ K}$ ) могут протекать реакции слияния легких ядер в более тяжелые.

Рассмотрим в качестве примера реакцию слияния ядер тяжелого водорода (дейтерия) и сверхтяжелого водорода (трития) с образованием ядра гелия и выбрасыванием нейтрона (одна из основных реакций, используемая в так называемых водородных бомбах)



Массы атомов дейтерия и трития равны соответственно  $m_{\text{H}_2} = 2,014708$  ат. ед. массы;  $m_{\text{H}_3} = 3,01700$  ат. ед. массы. Отсюда убыль массы покоя при реакции равна

$$\Delta m = 2,014708 + 3,01700 - 4,00390 - 1,00893 = \\ = 0,0189 \text{ ат. ед. массы} = 3,0 \cdot 10^{-26} \text{ г.}$$

Следовательно, выделение энергии при одном акте реакции составит:

$$\Delta E = 3,0 \cdot 10^{-26} \cdot 9 \cdot 10^{20} \text{ эрг} \approx 2,7 \cdot 10^{-5} \text{ эрг.}$$

При слиянии 1 г дейтерия и трития в гелий выделяется таким образом энергия:

$$2,7 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{6,023 \cdot 10^{23}}{5} = 3,3 \cdot 10^{18} \text{ эрг} = 0,78 \cdot 10^8 \text{ ккал.}$$

Мы видим, что хотя при одном акте реакции выделяется энергии примерно в 10 раз меньше, чем при делении урана, но в расчете на 1 г реагирующей смеси мы имеем при слиянии примерно в 3 раза больший энергетический выход.

Возвращаясь к трактовке закона взаимной связи массы и энергии, следует отметить, что получило довольно широкое распространение и даже проникло в популярную литературу неправильное представление о возможности превращения массы в энергию и наоборот. Например, часто приходится слышать утверждение, что при делении ядра урана часть его массы превращается в энергию. Очевидно, что это неправильное представление возникает в результате недостаточно четкого понимания различия между массой покоя (с которой только и имеет дело классическая физика) и полной массой (которая появляется в теории относительности). Следует подчеркнуть, что сразу после деления ядра урана полная масса его осколков в точности равняется полной массе исходного ядра, так же как полная энергия осколков равна полной энергии исходного ядра. В процессе деления происходит только частичное превращение массы покоя исходного ядра в кинетическую массу осколков и соответственно этому частичное превращение внутренней энергии исходного ядра в кинетическую энергию осколков.

### § 13. Квантовая теория света

Мы видели, что в теории относительности полная энергия частицы и импульс частицы, имеющей массу покоя  $m_0$  и движущейся со скоростью  $u$ , выражается формулами

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \quad (1.13)$$

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (2.13)$$

Исключая из этих формул скорость  $u$ , мы можем найти связь между энергией и импульсом.

Из уравнений (1.13) и (2.13) имеем:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 = \frac{m_0^2 c^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}};$$
$$p^2 = \frac{m_0^2 u^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}}.$$

Вычитая почленно полученные равенства, будем иметь

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m_0^2 c^2, \quad (3.13)$$

откуда

$$E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}. \quad (4.13)$$

Поставим себе теперь следующий вопрос, возможно ли по релятивистской теории существование частиц, не обладающих массой покоя, т. е. таких, для которых  $m_0 = 0$ . Ясно, что с точки зрения классической механики возможность существования таких частиц исключена.

В самом деле, в классической механике масса рассматривается как постоянная величина, характеризующая инертность частицы. Равенство массы нулю означает физически, что частица не обладает инертностью, а классические формулы  $\vec{p} = m\vec{u}$ ,  $T = \frac{mu^2}{2}$  показывают, что такая частица не обладает также ни количеством движения, ни кинетической энергией, т. е. всеми атрибутами, с которыми мы

связываем всякую материю. Совершенно иначе обстоит дело в теории относительности. Мы увидим, что существование таких частиц с точки зрения релятивистской механики не противоречит ни нашему опыту, ни представлениям об общих свойствах любой материи. Посмотрим, какими свойствами должны обладать подобные частицы. Формулы (1.13) и (2.13) показывают, что частицы с массой покоя, равной нулю, могут иметь отличные от нуля энергию и количество движения, если одновременно с  $m_0=0$  положить  $u=c$ .

Тогда выражения для энергии и импульса принимают неопределенные значения  $E=\frac{0}{0}$  и  $p=\frac{0}{0}$ . Как известно из математики, это значит, что энергия и импульс могут принимать любые значения от 0 до  $\infty$ . Формула (4.13) показывает при этом, что энергия и импульс частиц с нулевой массой покоя пропорциональны друг другу

$$\begin{aligned} E &= cp; \\ p &= \frac{E}{c}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Итак, мы приходим к выводу, что согласно теории относительности существование частиц с нулевой массой покоя возможно, причем эти частицы должны обладать двумя важнейшими свойствами: 1) они должны двигаться со скоростью света в вакууме  $c$ , 2) их импульс и энергия должны быть связаны соотношением (5.13).

Мы видим, что эти свойства сближают эти (пока гипотетические частицы) с световым излучением; излучение тоже распространяется в вакууме со скоростью  $c$  и обладает количеством движения, связанным с энергией формулой  $p=\frac{E}{c}$  (мы уже упоминали об этом в предыдущем параграфе, рассматривая опыт Эйнштейна с вагоном). Это позволяет возродить на новых началах отброшенную в начале XIX в. корпускулярную теорию света и рассматривать свет как поток корпускул с нулевой массой покоя. Эти частицы получили название световых квантов, или фотонов.

Таким образом, сама же теория относительности позволяет заполнить тот «вакуум», который образовался в наших представлениях о свете после ее появления. Напомним, что этот «вакуум» возник в результате крушения концепции эфира, как упругой всепроникающей среды, являющейся носителем электромагнитных волн.

Мы можем теперь сформулировать основные свойства фотонов.

1) Масса покоя фотонов равна нулю  $m_0=0$ .

2) Фотоны движутся со скоростью света в вакууме  $u=c$ .

3) Поскольку энергия покоя фотонов равна нулю, их полная энергия совпадает с кинетической, причем она связана с импульсом фотона формулой

$$\varepsilon = cf.$$

(Мы будем в этом параграфе в отличие от частиц, обладающих массой покоя, обозначать энергию фотонов символом  $\varepsilon$ , а импульс —  $\vec{f}$ .)

4) Не обладая массой покоя, фотоны обладают кинетической массой, которая, очевидно, совпадает с полной массой и равна

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{f}{c}. \quad (6.13)$$

Таким образом, фотоны обладают инертностью, причем эта инертность тем больше, чем больше энергия и импульс фотона.

5) Отметим, наконец, что отсутствие у фотона массы покоя означает физически, что покоящиеся фотоны не существуют в природе. Прекращение движения фотона, остановка фотона, означает его поглощение атомом.

Само собой разумеется, что при этом масса фотона, энергия фотона и количество движения фотона не исчезают, а передаются поглотившему атому. Однако было бы наивным предполагать, что фотон продолжает свое существование внутри атома. Поглощенный фотон исчезает как индивидуальная частица с соблюдением законов сохранения энергии и импульса.

Мы исчерпали тот запас сведений о квантах света, который следует из теории относительности. Дальнейшие сведения о свойствах квантов света нам может дать только эксперимент.

Обратимся к важнейшему для теории световых квантов явлению — фотоэффекту.

Как известно, явление фотоэффекта (впервые подробно исследованное Столетовым) заключается в том, что свет, падая на поверхность металла, выбивает из него электроны. Экспериментально обнаружены следующие основные свойства фотоэффекта:

1) Фотоэффект является безынерционным — вылет электронов начинается и прекращается практически одновременно с началом и концом освещения.

2) Количество вылетевших электронов пропорционально интенсивности падающего света.

3) Кинетическая энергия вылетевших электронов не зависит от интенсивности света и является линейной функцией частоты падающего света.

Убедимся теперь в том, что указанные три свойства фотоэффекта невозможно понять в рамках классической волновой теории света, в то время как квантовая теория света позволяет их объяснить легко и естественно.

С точки зрения волновой теории механизм вырывания электронов из металла заключается в следующем. Переменное электрическое поле падающей на металл электромагнитной волны заставляет электроны металла колебаться. По мере роста амплитуды этих колебаний растет и энергия колеблющегося электрона и, когда эта энергия становится достаточной для преодоления сил, удерживающих электрон внутри металла (для совершения так называемой работы выхода), он покидает металл. Так как энергия волны, падающей на металл, распределяется по всей поверхности металла, то на долю каждого электрона приходится весьма малая доля всего потока энергии. Поэтому, с точки зрения волновой теории, между началом освещения и вылетом электрона должно пройти некоторое (отнюдь не ничтожно малое, как показывает расчет) время, нужное для раскачки электрона.

Наоборот, с точки зрения квантовой теории, энергия светового потока переносится квантами и не распределяется по всей площади поверхности металла, а локализуется в отдельных точках (в точках попадания квантов). Следовательно, каждый квант несет значительную порцию энергии и может вызвать мгновенный вылет электрона. Столь же естественно объясняется квантовой теорией и второе свойство фотоэффекта. Так как каждый электрон вылетает из металла в результате поглощения одного кванта света, то между числом вылетевших электронов и числом квантов, падающих на металл (которое и определяет интенсивность света), должна существовать прямая пропорциональность.

Обращаясь, наконец, к третьему свойству фотоэффекта, заметим прежде всего, что это свойство несовместимо с волновой теорией света. В самом деле, с волновой точки

зрения, чем больше интенсивность падающего света, тем большая доля энергии приходится на долю каждого электрона и, следовательно, кинетическая энергия электронов должна зависеть от интенсивности света. С точки же зрения квантовой, каждый электрон получает энергию от одного кванта и, следовательно, эта энергия не зависит от числа квантов.

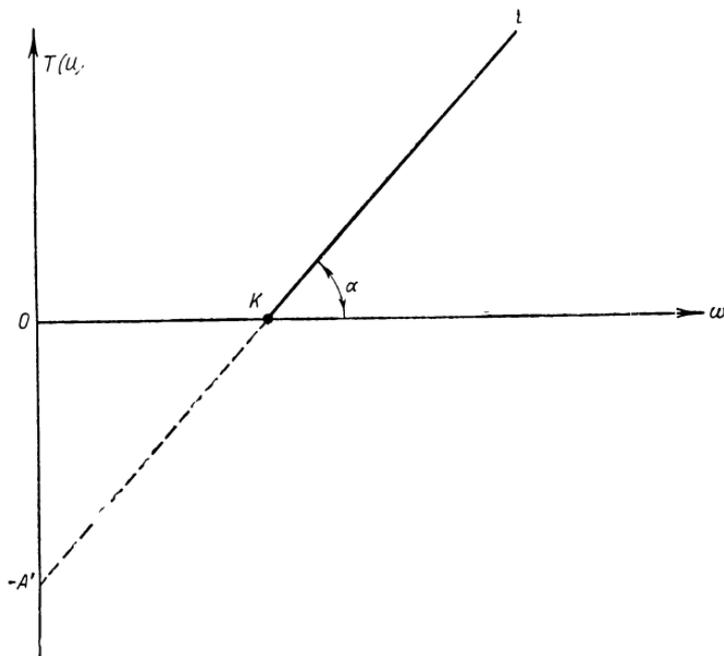


Рис. 30.

Согласно третьему свойству, кинетическая энергия фотоэлектронов линейно зависит от частоты падающего света. Графически это означает следующее. Если по оси абсцисс откладывать частоту падающего света, а по оси ординат кинетическую энергию электронов, то экспериментальные точки хорошо укладываются на прямую линию, наклоненную к оси абсцисс под некоторым углом  $\alpha$  (рис. 30). Если мы обозначим  $\operatorname{tg}\alpha = h$ , а отрезок, отсекаемый продолжением этой прямой на оси ординат, через  $A'$ , то математически эта зависимость выразится формулой

$$T(u) = h\omega - A'. \quad (7.13)$$

Опыты показывают, что если менять вещество, из которого сделана пластина, то наклон прямой  $KL$  остается неизменным, а меняется величина отрезка  $A'$ . Это означает, что  $h$  представляет собой универсальную постоянную. Измеряя наклон прямой  $KL$ , можно найти величину этой постоянной. Из равенства (7.13) видно, что размерность  $h$  равна размерности энергии, умноженной на время

$$[h] = \frac{[E]}{[\omega]} = [E \cdot t].$$

Численное значение  $h$  оказывается равным

$$h = 1,05 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}.$$

Мы будем называть  $h$  постоянной Планка (хотя, строго говоря, постоянной Планка называют величину  $h'$ , большую  $h$  в  $2\pi$  раз.  $h' = 2\pi h = 6,62 \cdot 10^{-27}$  эрг·сек).

Рассмотрим теперь физический смысл равенства (7.13). Согласно закону сохранения энергии при одном акте фотоэффекта энергия светового кванта  $E$  должна расходоваться на работу вырывания электрона из металла  $A$  и на сообщение электрону кинетической энергии

$$E = T(u) + A. \quad (8.13)$$

Перепишем это равенство в виде

$$T(u) = E - A.$$

Так как величина работы выхода  $A$  различна для разных металлов, а энергия кванта  $E$  должна зависеть только от свойств света, то, сопоставляя это равенство с (7.13), мы видим, что они тождественны по своему физическому содержанию и выражают оба закон сохранения энергии. При этом величина  $A'$  в равенстве (7.13) равна  $A$  — работе выхода, а произведение  $h\omega$  выражает энергию светового кванта.

Учитывая формулы (5.13) и (6.13), мы видим, что энергия, масса и импульс световых квантов определяются частотой света  $\omega$  и выражаются формулами:

$$\varepsilon = h\omega; \quad (9.13)$$

$$m = \frac{h\omega}{c^2}; \quad (10.13)$$

$$f = \frac{h\omega}{c}. \quad (11.13)$$

Если ввести волновой вектор  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ , имеющий направление волны, то последнюю формулу можно переписать в виде

$$\vec{f} = h\vec{k}.$$

Те же величины можно, очевидно, выразить и через длину волны света. Учитывая, что

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda},$$

где  $T$  — время световых колебаний, а  $\lambda$  — длина волны света, получим

$$\varepsilon = \frac{2\pi hc}{\lambda}; \quad (9a.13)$$

$$m = \frac{2\pi h}{c\lambda}; \quad (10a.13)$$

$$f = \frac{2\pi h}{\lambda}. \quad (11a.13)$$

Квантовые представления о свете позволяют легко объяснить целый ряд эффектов, возникающих при взаимодействии света с веществом.

Рассмотрим ряд характерных примеров.

1) **Э ф ф е к т К о м п т о н а**. Если поток рентгеновских лучей падает на вещество, то происходит рассеяние лучей, т. е. из рассеивателя лучи исходят по всевозможным направлениям. На рисунке 31 изображена принципиальная схема наблюдения явления.

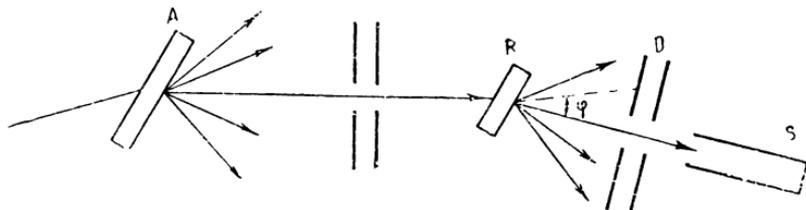


Рис. 31.

Здесь  $A$  — антикатод рентгеновской трубки,  $R$  — рассеивающее вещество,  $D$  — система диафрагм, выделяющих пучок лучей, рассеянных на угол  $\varphi$ ,  $S$  — рентгеновский спектрометр, позволяющий измерять длину волны рассеянных лучей.

С точки зрения волновой теории, это явление может быть описано следующим образом. Переменное электрическое поле падающей электромагнитной волны приводит в колебания электроны вещества. Колеблющиеся электроны сами становятся источником вторичных электромагнитных волн, которые распространяются во всех направлениях. Эти вторичные волны и образуют поток рассеянных рентгеновских лучей. Из теории вынужденных колебаний следует, что частота колебаний электрона должна совпадать с частотой колебаний электрического поля.

Следовательно, по классической теории частота и длина волны рассеянных лучей должны совпадать с частотой и длиной волны падающих лучей.

Опыт, однако, показал, что в спектре рассеянных лучей помимо несмещенной линии есть смещенные линии, отвечающие меньшей частоте ( $\omega' < \omega$ ) и соответственно большей длине волны ( $\lambda' > \lambda$ ), чем у падающих лучей. Это явление было экспериментально открыто в 1923 г. Комптоном и получило название эффекта Комптона.

Легко видеть, что квантовая теория дает этому явлению простое объяснение. Так как при столкновении с электронами кванты рентгеновских лучей передают им часть своей энергии, то их энергия при этом уменьшается  $E' < E$ . Тогда из формулы  $E = h\omega$  непосредственно следует, что  $\omega' < \omega$  и соответственно  $\lambda' > \lambda$ . Очевидно, что чем больше угол рассеяния, тем больше передача энергии при столкновении. Поэтому изменение частоты должно увеличиваться с увеличением угла рассеяния  $\varphi$ , достигая максимума при  $\varphi = 180^\circ$ , что и подтверждается экспериментом. Кроме того, поскольку рассеивателями рентгеновских квантов являются отдельные электроны, то эффект Комптона не должен зависеть от природы рассеивающего вещества, что также согласуется с данными опыта.

Перейдем к количественной теории явления. Рассмотрим упругое соударение светового кванта со свободным электроном (энергией связи электрона в атоме можно пренебречь). Обозначим импульс кванта до удара  $f$ , после удара  $f'$ , импульс электрона после удара  $p$ , и пусть  $\varphi$  есть угол рассеяния кванта (рис. 32).

Закон сохранения импульса для этого процесса может быть записан в виде

$$\vec{f} = \vec{f}' + \vec{p}.$$

Так как энергия фотона до и после удара равна соответственно  $\epsilon = cf$ ,  $\epsilon' = cf'$ , то закон сохранения энергии запишется следующим образом:

$$cf + m_0c^2 = cf' + E,$$

где  $E$  — энергия электрона после столкновения. Перепишем эти уравнения в виде

$$\vec{p} = \vec{f} - \vec{f}';$$

$$\frac{E}{c} = m_0c + f - f'.$$

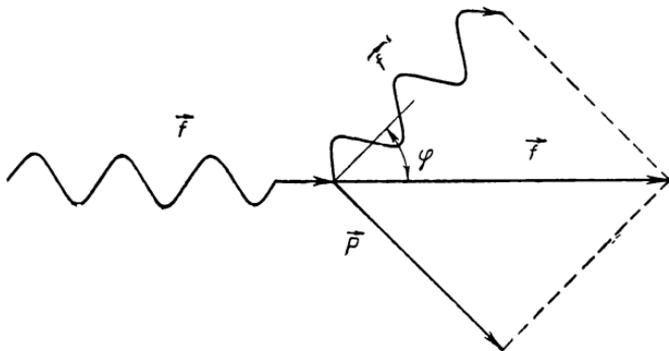


Рис. 32.

Возводя полученные равенства в квадрат, будем иметь

$$p^2 = f^2 + f'^2 - 2ff' \cos \varphi;$$

$$\frac{E^2}{c^2} = m_0^2c^2 + f^2 + f'^2 + 2m_0c(f - f') - 2ff'.$$

Вычитая теперь из второго равенства первое и учитывая, что

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2c^2 \text{ (равенство 3.13),}$$

получим

$$2m_0c(f - f') - 2ff'(1 - \cos \varphi) = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{f'} - \frac{1}{f} = \frac{2}{m_0c} \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Для того чтобы получить изменения длины волны при комптон-эффекте, выразим импульсы фотона  $f$  и  $f'$  через длины

волн до и после рассеяния  $\lambda$  и  $\lambda'$  по формулам (11а.13). Тогда окончательно получим

$$\lambda' - \lambda = \frac{4\pi h}{m_0 c} \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Постоянная  $\lambda_0 = \frac{2\pi h}{m_0 c} = 0,02427 \text{ \AA}$  носит название комptonовской длины волны. Вводя ее в предыдущую формулу, получим основное уравнение комpton-эффекта в виде

$$\Delta\lambda = 2\lambda_0 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (12.13)$$

Уравнение (12.13) действительно выражает свойства комpton-эффекта, о которых мы говорили выше: изменение длины волны  $\Delta\lambda$  одинаково для всех веществ и тем больше, чем больше угол рассеяния  $\varphi$ . При  $\varphi=0$  мы имеем  $\Delta\lambda=0$ , при  $\varphi=90^\circ$  имеем  $\Delta\lambda=\lambda_0$ , при  $\varphi=180^\circ$  соответственно  $\Delta\lambda=2\lambda_0$ .

2) Покажем, что свободные электроны не могут излучать (и поглощать) световые кванты. Действительно, если бы такой процесс был возможен, то он изображался бы схемой, изображенной на рисунке 33.



Рис. 33.

(Мы рассматриваем явление для простоты в такой системе отсчета, где электрон до излучения покоился.)

Законы сохранения энергии и импульса дают

$$p = f, \\ m_0 c^2 = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} + cf,$$

где  $c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$  есть энергия электрона после излучения.

Подставляя в последнее равенство  $p=f$ , получим для определения  $f$  уравнение

$$m_0 c^2 = c \sqrt{f^2 + m_0^2 c^2} + cf. \quad (13.13)$$

Нетрудно видеть, что оно имеет единственный корень  $f=0$ .

3) Взаимопревращения электронов и фотонов. Рассматривая ядерные реакции, мы видели, что в ходе этих реакций масса покоя ядер и, следовательно, энергия

покоя ядер могут частично превращаться в кинетическую массу и кинетическую энергию. Возникает вопрос, существуют ли в природе такие реакции, при которых происходит полное превращение массы покоя и энергии покоя в кинетическую массу и кинетическую энергию. Очевидно, такие реакции должны заключаться в превращении исходных частиц, обладающих массой покоя, в фотоны.

До 1932 г. такие реакции были неизвестны физикам. В 1932 г. Андерсон в составе космических лучей обнаружил так называемые «положительные электроны», или позитроны, т. е. частицы с такой же массой покоя, как и электроны, но противоположным по знаку электрическим зарядом.

Дальнейшие исследования показали, что при столкновении с электроном эти две частицы (электрон и позитрон) могут исчезать, превращаясь в два  $\gamma$ -кванта.

Превращение пары электрон-позитрон в два  $\gamma$ -кванта удобнее всего рассмотреть в такой системе отсчета, в которой электрон и позитрон движутся навстречу друг другу с одинаковыми по величине скоростями  $u$  и  $-u$ .

Из закона сохранения импульса тогда следует, что в этой системе отсчета два  $\gamma$ -кванта также будет разлетаться в противоположных направлениях, имея одинаковые по величине импульсы  $\frac{h\omega}{c}$ , а следовательно, и частоты (рис. 34).

По закону сохранения энергии имеем

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = h\omega, \quad (14.13)$$

откуда частота  $\gamma$ -квантов равна

$$\omega = \frac{m_0 c^2}{h \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

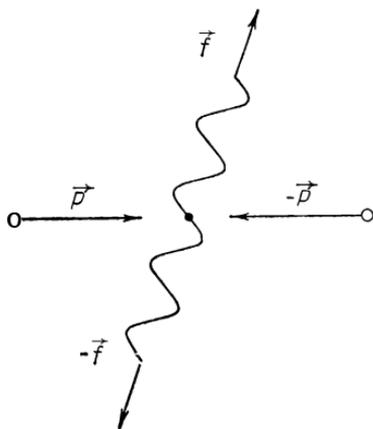


Рис. 34.

Мы видим, что наименьшее значение частоты (при которой осуществляется превращение пары очень медленных частиц) равно

$$\omega_0 = \frac{m_0 c^2}{h},$$

т. е. максимальная длина волны

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} = \frac{2\pi h}{m_0 c}$$

есть комptonовская длина волны.

Отметим, что, рассматривая превращение пары частиц в два  $\gamma$ -кванта в специальной системе отсчета, мы не ограничиваем общности, так как, используя преобразования Лорентца, мы всегда можем перейти к любой другой системе отсчета, например к такой, в которой одна из частиц покоится.

Мы рассмотрели своеобразную «химическую» реакцию, заключающуюся в том, что пара частиц — позитрон и электрон — превращается в два  $\gamma$ -кванта.

Энергетически рассмотренная реакция может протекать как в прямом, так и в обратном направлении. Поэтому возможен и обратный процесс превращения двух  $\gamma$ -квантов в пару позитрон-электрон. Однако превращение пары частиц в один  $\gamma$ -квант невозможно, так как такой процесс противоречит закону сохранения импульса (суммарный импульс электрона и позитрона равен нулю, в то время как импульс фотона не равен нулю).

Однако если этот процесс происходит в веществе (а не в вакууме), то избыточный импульс может принять на себя какая-либо посторонняя частица, например атомное ядро. При этом закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{2m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = h\omega, \quad (15.13)$$

не учитывая кинетической энергии ядра, так как благодаря большой массе ядра оно уносит избыток импульса, не приобретая значительной скорости (другими словами, мы можем рассматривать ядро как неподвижную стенку).

Обратная реакция превращения одного  $\gamma$ -кванта в пару электрон-позитрон в веществе также является возможной.

Читая равенство (15.13) справа налево, мы видим,

что минимальная энергия  $\gamma$ -квантов, которые способны превратиться в пару позитрон-электрон, должна быть больше, чем  $2m_0c^2=1,02 \text{ MeV}$ .

В заключение отметим, что обнаруженные в лабораториях процессы превращения пары позитрон-электрон в  $\gamma$ -кванты иногда неудачно называют процессами «аннигиляции» (превращения в ничто) пары. На самом деле никакого превращения в ничто мы в таких процессах не имеем. Происходит лишь превращение одной формы материи (обладающей массой покоя) в другую форму материи (не обладающую массой покоя) со строгим соблюдением законов сохранения полной массы (масса покоя электрона и позитрона превращается в кинетическую массу кванта), энергии, импульса и электрического заряда.

Мы предпочитаем поэтому говорить о взаимных превращениях частиц и  $\gamma$ -квантов.

4) Излучение света покоящимся атомом. В случае, если излучающим телом является не элементарная частица — электрон, а атом, положение дел меняется. В процессе излучения часть внутренней энергии атома перейдет в энергию движения фотона и атома. Это значит, что энергия покоя, а следовательно, и масса покоя атома уменьшатся в результате излучения. Обозначая массу покоя атома до излучения  $M_0$ , а после излучения  $M'_0$ , будем иметь  $M'_0 < M_0$ . (Для электрона, как для элементарной частицы,  $m_0 = \text{const.}$ )

Тогда для определения импульса фотона  $f$  мы получим уравнение

$$M_0c^2 = c\sqrt{f^2 + M_0'^2c^2} + cf, \quad (16.13)$$

которое отличается от уравнения (13.13) только тем, что в правой части вместо  $m_0$  стоит  $M'_0$ .

Решая это уравнение, получим

$$(M_0c - f)^2 = f^2 + M_0'^2c^2$$

или

$$f = \frac{(M_0^2 - M_0'^2)c}{2M_0}. \quad (17.13)$$

5) Излучение света движущимся атомом. Эффект Доплера. В классической физике хорошо известно, что если источник волн (безразлично какой природы — звуковые волны, световые волны и т. д.) и прием-

ник волн движутся друг относительно друга, то частота воспринимаемых волн изменяется по сравнению с тем случаем, когда и источник и приемник находятся в покое. Если источник и приемник сближаются, то воспринимаемая частота становится больше, если они удаляются друг от друга, частота становится меньше. При этом в классической физике приходится различать два случая:

а) Двигается источник волн, а приемник находится в покое.

Тогда

$$\omega' = \frac{\omega}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}, \quad (18.13)$$

где  $\omega'$  — частота волн, воспринимаемая приемником,  $\omega$  — частота испускаемых волн в системе источника,  $v$  — скорость источника волн,  $c$  — скорость распростра-

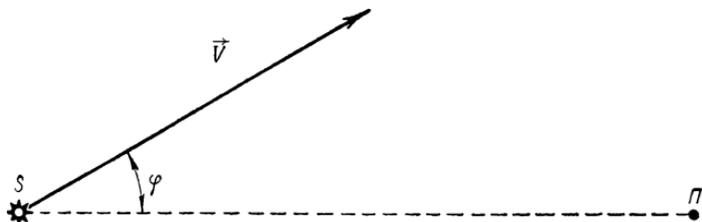


Рис. 35.

нения волн,  $\varphi$  — угол между направлением скорости  $v$  и линией, соединяющей источник и приемник (рис. 35).

б) Источник волн находится в покое, движется приемник волн. Тогда

$$\omega' = \omega \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right), \quad (19.13)$$

где  $u$  — скорость движения приемника и  $\theta$  — угол между направлением  $\vec{u}$  и линией источник-приемник (рис. 36).

Если речь идет о звуковых волнах, наличие такой разницы между этими двумя случаями вполне объяснимо, так как в первом случае источник движется по отношению к воздуху — той упругой среде, в которой происходит распространение волн, а во втором случае движения источника относительно среды нет. С точки зрения классической волновой теории света точно так же обстоит дело и в

оптике, только роль воздуха, как передающей среды, играет эфир. Поэтому различие формул (16.13) и (17.13) позволяет в принципе определить скорость абсолютного движения источника или приемника света. Однако с точки зрения теории относительности, в которой понятие эфира, как

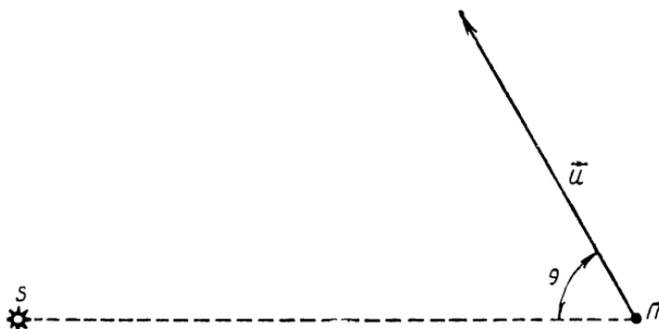


Рис. 36.

упругой механической среды, передающей волны света отсутствует, никакой разницы между этими двумя случаями существовать не должно.

Убедимся теперь в том, что релятивистскую теорию эффекта Доплера можно построить исходя из квантовых

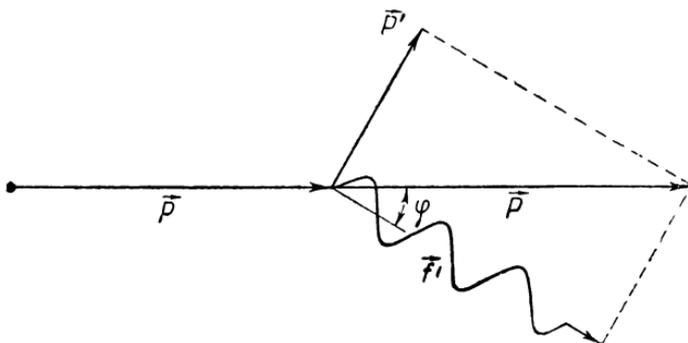


Рис. 37.

представлений. Будем считать, что квант света излучается движущимся атомом. Обозначим  $\vec{p}$  и  $\vec{p}'$ ,  $E$  и  $E'$  — импульсы и энергии атома до и после излучения,  $f'$  — импульс фотона, излученного движущимся атомом, а  $\varphi$  — угол между направлением скорости (импульса) атома и направлением излучения (рис. 37).

Законы сохранения энергии и импульса запишутся следующим образом

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{p}' + \vec{f}'; \\ E &= E' + cf',\end{aligned}$$

где  $cf'$  есть энергия излученного фотона. Найдя из этих равенств  $p'$  и  $E'$  и возведя их в квадрат, получим

$$\begin{aligned}p'^2 &= p^2 + f'^2 - 2pf' \cos \varphi; \\ \frac{E'^2}{c^2} &= \frac{E^2}{c^2} + f'^2 - \frac{2Ef'}{c}.\end{aligned}$$

Вычитая из второго равенства первое и учитывая, что

$$\frac{E'^2}{c^2} - p'^2 = M_0'^2 c^2 \quad \text{и} \quad \frac{E^2}{c^2} - p^2 = M_0^2 c^2,$$

имеем

$$M_0'^2 c^2 = M_0^2 c^2 - 2f' \left( \frac{E}{c} - p \cos \varphi \right).$$

Учтем теперь, что на основании формулы (17.13)

$$M_0'^2 c^2 = M_0^2 c^2 - 2M_0 cf,$$

где  $f$  — импульс кванта, излучаемого неподвижным атомом. Отсюда получим

$$f' = f \frac{M_0 c}{\frac{E}{c} - p \cos \varphi}.$$

Подставляя, наконец, в эту формулу значения импульса и энергии атома

$$E = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad p = \frac{M_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

и заменяя  $f = \frac{h\omega}{c}$  и  $f' = \frac{h\omega'}{c}$ , получим релятивистскую формулу для эффекта Доплера

$$\omega' = \omega \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u}{c} \cos \varphi}. \quad (20.13)$$

Заметим, что согласно принципу относительности изменение частоты зависит только от относительного движения атома и приемника и поэтому формула (20.13) справедлива

и для случая, когда излучающий атом покоится, а движется прибор, воспринимающий свет. Мы покажем это строго в следующей главе. Мы видим, что с точностью до малых величин второго порядка по отношению к  $\frac{u}{c}$  формула (20.13) совпадает с обеими классическими формулами (18.13) и (19.13) (так как  $\frac{1}{1 - \frac{u}{c} \cos \varphi} \approx 1 + \frac{u}{c} \cos \varphi$ ).

Важным отличием релятивистской формулы (20.13) от классических формул (18.13) и (19.13) является то, что в релятивистской области существует так называемый поперечный эффект Доплера, т. е. частота изменяется и в том случае, когда направление относительной скорости перпендикулярно к направлению наблюдения ( $\varphi=90^\circ$ ). Заметим, что в классической физике в этом случае эффект отсутствует: в самом деле, формулы (18.13) и (19.13) при  $\varphi=90^\circ$  дают  $\omega'=\omega$ .

Релятивистская формула (20.13) при  $\varphi=90^\circ$  дает

$$\omega' = \omega \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}, \quad (21.13)$$

т. е. изменение частоты второго порядка малости относительно  $\frac{u}{c}$ . (Заметим, что продольный эффект Доплера — величина первого порядка малости относительно  $\frac{u}{c}$ .) Экспериментальное обнаружение поперечного эффекта Доплера благодаря этому представляет собой довольно сложную задачу, так как малейшее отклонение от перпендикулярности между направлениями движения и наблюдения замаскирует эффект.

Тем не менее в 1938 г. Айвс обнаружил поперечный эффект Доплера, используя в качестве движущегося источника так называемые каналовые лучи водорода (поток быстрых положительных ионов, образующихся в разрядной трубке и выпускаемых через канал в катоде). Измерения Айвса дали для изменения частоты значения, хорошо согласующиеся с формулой (21.13).

Следовательно, типичное волновое явление — эффект Доплера — также хорошо объясняется фотонной теорией света.

Может создаться, однако, неправильное представление, что квантовая теория света означает радикальный возврат

к отброшенной в XIX в. корпускулярной теории света. Однако это не так: основные формулы квантовой теории света  $E = h\omega$ ,  $\vec{f} = h\vec{k}$  достаточно ясно показывают, что в самом определении энергии и импульса фотона содержатся основные элементы волновых представлений — частота волнового процесса  $\omega$  и волновой вектор  $\vec{k}$ .

Кроме того, законы сохранения энергии и импульса, которые мы использовали при выводе формул этого параграфа, не позволяют ничего сказать о распределении интенсивности света (например, при комптон-эффекте — о распределении интенсивности рассеянных рентгеновских лучей по направлениям), что оказывается возможным только с точки зрения волновых представлений.

Таким образом, мы приходим к выводу, что квантовая теория света отнюдь не исключает, а лишь дополняет волновую теорию света. И в самом деле, современная физика сумела построить всеобъемлющую теорию света (квантовая электродинамика), в которой органически сочетаются и взаимно дополняют друг друга и корпускулярные и волновые представления.

Однако сколько-нибудь подробное изложение квантовой электродинамики далеко выходит за рамки этой книги.

## § 14. Четырехмерная геометрия Минковского. Четырехмерные векторы

В заключение этой главы мы рассмотрим весьма глубокую и плодотворную геометрическую интерпретацию релятивистской механики, предложенную Г. Минковским три года спустя после создания теории относительности. Интересно отметить, что на первых порах идея Минковского поразила физиков своей необычностью и непривычностью и была воспринята как чисто формальный математический прием, не имеющий глубокого физического смысла.

Ее плодотворность выяснилась только при дальнейшем развитии теории, особенно при создании теории тяготения и современной теории элементарных частиц.

Речь идет о глубокой взаимосвязи пространства и времени, которая обнаруживается при рассмотрении движений с большими скоростями и остается скрытой в области классической механики. То, что такая связь действительно долж-

на существовать, следует уже из того, что в отличие от преобразований Галилея преобразования Лорентца

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

меняют не только пространственные координаты  $x$ , но и время  $t$ .

Идея Минковского основана на аналогии между преобразованием вращения двухмерной системы координат и преобразованием Лорентца.

Как мы уже видели в § 2 главы II, если ввести вместо времени в качестве новой переменной произведение  $ict$ , то формулы преобразований Лорентца формально можно рассматривать как формулы поворота координатных осей в плоскости  $x, ict$  на мнимый угол  $\varphi$ , определенный равенством

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{i \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Введем, следуя Минковскому, следующие удобные обозначения:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict.$$

В этих обозначениях любое событие определяется четверкой чисел  $x_1, x_2, x_3, x_4$  (естественно, эта четверка чисел различна в разных системах отсчета).

Замысел Минковского заключается в объединении обычного трехмерного пространства и времени в единое четырехмерное многообразие (которое для краткости иногда называют четырехмерным «миром»). Точками этого пространства являются события, задаваемые четверками чисел  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , из которых первые три действительны и представ-

ляют собой проекции трехмерного радиуса-вектора на оси  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , а четвертое число — мнимое и представляет собой время событий, умноженное на  $ic$ . Движение материальной точки связано с непрерывным изменением параметров  $x_1, x_2, x_3, x_4$  и в схеме Минковского изображается непрерывным рядом «мировых точек», мы будем поэтому говорить, что мировая точка описывает мировую линию.

Формулы преобразований Лорентца (с обозначением  $\frac{v}{c} = \beta$ ) примут следующий весьма симметричный вид и могут рассматриваться как формулы преобразования координат при вращении четырехмерной координатной системы

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_1 + i\beta x_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \\ x_4' &= \frac{x_4 - i\beta x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

По аналогии с аналитической геометрией в трехмерном пространстве мы можем смотреть на четверку чисел  $x_1, x_2, x_3, x_4$  как на проекции четырехмерного радиуса-вектора на оси  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Тогда формулы (1.14) дают нам закон преобразования проекций четырехмерного радиуса-вектора  $R$  при «вращении» четырехмерной системы координат. (Мы будем в дальнейшем в отличие от трехмерных векторов отмечать четырехмерные векторы стрелкой снизу.)

Наконец, в новых обозначениях интервал между двумя событиями выразится следующим образом:

$$S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2,$$

и может рассматриваться как квадрат четырехмерного расстояния между двумя мировыми точками. Инвариантность интервала с этой точки зрения становится совершенно естественной — расстояния между точками не меняются при преобразовании вращения.

Обратим внимание на то, что геометрия четырехмерного «мира» весьма своеобразна. В силу того что четвертая координата  $x_4$  является чисто мнимой, интервал между двумя событиями (четырёхмерное расстояние) может ока-

заться равным нулю, хотя эти события и не совпадают. Мы уже знаем (см. § 9), что в этом случае события могут быть связаны распространением светового сигнала.

Это своеобразие проявляется также в том, что все интервалы, как мы видели в § 9, распадаются на два класса — вещественные, или пространственно-подобные, интервалы и мнимые, или временно-подобные, интервалы. При этом никаким преобразованием Лорентца (четырёхмерным вращением) нельзя интервал одного класса превратить в интервал другого класса.

В противоположность этому в трёхмерной геометрии подобное разделение расстояния на два класса отсутствует и всегда существует такое вращение координатной системы, которое одно заданное направление превращает в другое заданное направление.

В заключение отметим, что появление в формулах четырёхмерной геометрии мнимой единицы ( $i = \sqrt{-1}$ ) является результатом применения чисто математического приема, позволяющего придать формулам этой геометрии симметричный во всех координатах  $x_1, x_2, x_3, x_4$  вид. В окончательных формулах, к которым приводит любое вычисление, мнимая единица  $i$  выпадает, поскольку в них всегда появятся три вещественные координаты  $x = x_1, y = x_2, z = x_3$  и вещественное время  $t = -\frac{i}{c}x_4$ .

По аналогии с четырёхмерным радиусом-вектором  $\vec{R}$  ( $x_1, x_2, x_3, x_4$ ) можно составить ряд других четырёхмерных векторов.

В качестве первого примера рассмотрим вектор четырёхмерной скорости, проекции которого определяем как производные проекций четырёхмерного радиуса-вектора частицы по инвариантному (собственному) времени  $\tau$

$$u_1 = \frac{dx_1}{d\tau}; \quad u_2 = \frac{dx_2}{d\tau}; \quad u_3 = \frac{dx_3}{d\tau}; \quad u_4 = \frac{dx_4}{d\tau}. \quad (2.14)$$

Вспоминая, что собственное время  $\tau$  связано с лабораторным временем  $t$  соотношением

$$\tau = t \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}, \quad t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

где  $u$  — скорость частицы, найдем

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{dx_1}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{u_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\
 u_2 &= \frac{dx_2}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{u_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\
 u_3 &= \frac{dx_3}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{u_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\
 u_4 &= \frac{dx_4}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Нетрудно видеть, что компоненты четырехмерной скорости не являются независимыми друг от друга, так как сумма их квадратов равна  $-c^2$ :

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = \frac{u^2 - c^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = -c^2.
 \tag{4.14}$$

Можно легко проверить, что преобразования Лоренца для вектора четырехмерной скорости вновь приводят нас к релятивистской теореме сложения скоростей. Действительно, по аналогии с (1.14) имеем

$$\begin{aligned}
 u'_1 &= \frac{u_1 + i\beta u_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\
 u'_2 &= u_2 \\
 u'_3 &= u_3 \\
 u'_4 &= \frac{u_4 - i\beta u_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{5.14}$$

Подставляя значения  $u_1, u_2, u_3, u_4$  из (3.14), получим

$$\begin{aligned}
 u'_x &= \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\
 u'_y &= \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot u_y
 \end{aligned}$$

$$u'_z = \sqrt{\frac{1 - \frac{u'^2}{c^2}}{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot u_z$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{1 - \frac{vu_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Последнее из этих равенств дает

$$\sqrt{\frac{1 - \frac{u'^2}{c^2}}{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}},$$

откуда, подставляя это значение в первые три равенства, получим

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}};$$

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}};$$

$$u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}},$$
(6.14)

т. е. теорему сложения скоростей Эйнштейна.

Умножая проекции вектора четырехмерной скорости на инвариантную массу покоя частицы  $m_0$ , мы получим, очевидно, новый четырехмерный вектор  $P$ , который естественно назвать вектором четырехмерного импульса. Обозначая его проекции  $P_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ), получим:

$$P_1 = m_0 u_1 = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = p_x$$

$$P_2 = m_0 u_2 = \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = p_y$$

$$P_3 = m_0 u_3 = \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = p_z$$

$$P_4 = m_0 u_4 = \frac{im_0 c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (7.14)$$

Итак, первые три проекции четырехмерного импульса образуют трехмерный вектор релятивистского импульса  $\vec{p}$ , что же касается проекции  $P_4$ , то ее легко преобразовать к виду

$$P_4 = \frac{i}{c} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{i}{c} E. \quad (7a.14)$$

Итак, четвертая проекция четырехмерного импульса представляет собой полную энергию частицы, умноженную на коэффициент  $\frac{i}{c}$ . Это обстоятельство позволяет назвать четырехмерный вектор  $\vec{P}$  вектором энергии-импульса.

На основании определения вектора энергии-импульса и равенства (4.14) мы можем написать для суммы квадратов проекций вектора  $\vec{P}$  равенство

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 = -m_0^2 c^2. \quad (8.14)$$

Подставляя теперь значения проекций  $P_1, P_2, P_3, P_4$  из формул (7.14) и (7a.14), получим

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2,$$

$$E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2},$$

т. е. уже известную нам связь полной энергии и импульса. Запишем теперь по аналогии с (1.14) и (5.14) формулы преобразований Лоренца для проекций вектора  $\vec{P}'$

$$P'_1 = \frac{P_1 + i\beta P_4}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$P'_2 = P_2$$

$$P'_3 = P_3$$

$$P'_4 = \frac{P_4 - i\beta P_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (9.14)$$

Подставляя значения  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , будем иметь

$$\begin{aligned}
 p'_x &= \frac{p_x - \frac{v}{c^2} \cdot E}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
 p'_y &= p_y \\
 p'_z &= p_z \\
 E' &= \frac{E - vp_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.
 \end{aligned}
 \tag{10.14}$$

Формулы (10.14) показывают, как изменяются импульс и энергия частицы при переходе от «языка» системы  $k$  к «языку» системы  $k'$ . Посмотрим, какой вид принимают эти формулы в нерелятивистском приближении  $v \ll c$ .

В этом случае мы можем положить:

$$E = m_0 c^2 + \frac{m_0 u^2}{2} + \dots$$

Тогда с точностью до малых второго порядка относительно  $\frac{v}{c}$  получим

$$\begin{aligned}
 p'_x &= p_x - m_0 v; \\
 p'_y &= p_y; \\
 p'_z &= p_z; \\
 \frac{m_0 u'^2}{2} &= \frac{m_0 u^2}{2} + \frac{m_0 v^2}{2} - vp_x.
 \end{aligned}$$

(В последнем равенстве мы воспользовались разложением

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots)$$

Подставляя в эти равенства классические выражения импульсов  $p_x = m_0 u_x$  и  $p'_x = m_0 u'_x$ , мы получим равенства

$$\begin{aligned}
 m_0 u'_x &= m_0 (u_x - v); \\
 m_0 u'_y &= m_0 u_y; \\
 m_0 u'_z &= m_0 u_z; \\
 \frac{m_0}{2} [u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z] &= \frac{m_0}{2} [(u_x - v)^2 + u^2_y + u^2_z],
 \end{aligned}$$

которые, очевидно, являются следствием классической теоремы сложения скоростей

$$u'_x = u_x - v, \quad u'_y = u_y, \quad u'_z = u_z.$$

Применим преобразования четырехмерного вектора  $\vec{P}$  энергии-импульса для рассмотрения следующего полезного примера. Пусть имеется система  $n$  материальных точек, которые взаимодействуют друг с другом только при столкновениях (как известно, именно так в кинетической теории газов представляют себе идеальный газ).

Релятивистский трехмерный импульс такого газа равен, очевидно, сумме импульсов отдельных молекул. Обозначая массы покоя молекул  $m_{0i}$  (они могут быть и неодинаковыми, если мы имеем дело со смесью газов) и скорости молекул  $u_i$ , получим:

$$P_1 = p_x = \sum_{i=1}^n \frac{m_{0i} u_{xi}}{\sqrt{1 - \frac{u_i^2}{c^2}}}$$

$$P_2 = p_y = \sum_{i=1}^n \frac{m_{0i} u_{yi}}{\sqrt{1 - \frac{u_i^2}{c^2}}}$$

$$P_3 = p_z = \sum_{i=1}^n \frac{m_{0i} u_{zi}}{\sqrt{1 - \frac{u_i^2}{c^2}}}.$$

Совершенно аналогично выражение для четвертой проекции запишется в виде

$$P_4 = \frac{i}{c} E = \frac{i}{c} \sum_{i=1}^n \frac{m_{0i} c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_i^2}{c^2}}}.$$

Рассмотрим сначала газ в такой системе отсчета  $k$ , в которой он как целое покоится; обозначая энергию газа в этой системе отсчета  $E_0$ , будем иметь

$$P_1 = p_x = 0$$

$$P_2 = p_y = 0$$

$$P_3 = p_z = 0$$

$$P_4 = \frac{i}{c} E_0.$$

Перейдем теперь к системе отсчета  $k'$ , которая движется по отношению к  $k$  со скоростью  $v$ . Используя преобразования Лорентца (9.14), получим в новой системе отсчета (полагая  $\beta = \frac{v}{c}$ )

$$P'_1 = p'_x = \frac{i\beta P_4}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{\frac{E_0}{c^2} v}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$P'_2 = p'_y = p_y = 0$$

$$P'_3 = p'_z = p_z = 0$$

$$P'_4 = \frac{i}{c} E = \frac{\frac{i}{c} E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Подставляя значение  $E_0 = \sum_{i=1}^n \frac{m_{0i} c^2}{\sqrt{1-\frac{u_i^2}{c^2}}}$ , мы можем пере-

писать первое и четвертое равенства в виде

$$p'_x = -\frac{\sum_{i=1}^n \frac{m_{0i}}{\sqrt{1-\frac{u_i^2}{c^2}}} \cdot v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$

$$E = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{m_{0i}}{\sqrt{1-\frac{u_i^2}{c^2}}} \cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Сравним эти формулы с определениями энергии и импульса (знак «—» в формуле (11.14) связан с тем, что скорость газа в системе  $k'$  равна  $-v$ )

$$p = -\frac{M_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad E = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

где  $M_0$  — масса покоя газа. Мы видим, что

$$M_0 = \sum_{i=1}^n \frac{m_{0i}}{\sqrt{1-\frac{u_i^2}{c^2}}}.$$

Масса покоя газа не равна сумме масс покоя его молекул. Перепишем, с учетом (2.11), последнее равенство в виде

$$\begin{aligned}
 M_0 &= \sum_{i=1}^n m_{0i} + \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^n m_{0i} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_i^2}{c^2}}} - 1 \right\} c^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^n m_{0i} + \frac{\sum T(u_i)}{c^2}.
 \end{aligned}$$

Так как с микроскопической точки зрения сумма кинетических энергий молекул есть внутренняя энергия идеального газа  $\sum T(u_i) = Q$ , то последнее равенство принимает вид

$$M_0 = \sum_{i=1}^n m_{0i} + \frac{Q}{c^2}. \quad (13.14)$$

Это еще раз иллюстрирует закон взаимной связи массы и энергии: мы видим, что нагревание газа — сообщение ему количества теплоты  $Q$  — увеличивает массу газа на  $\frac{Q}{c^2}$ .

Применим определение четырехмерного вектора энергии-импульса к фотонам.

Учитывая, что энергия и импульс фотона выражаются формулами  $\epsilon = h\omega$ ,  $\vec{f} = h\vec{k}$ , получим

$$\begin{aligned}
 P_1 &= hk_x \\
 P_2 &= hk_y \\
 P_3 &= hk_z \\
 P_4 &= \frac{i}{c} h\omega.
 \end{aligned}$$

Поделив проекцию четырехмерного импульса на инвариантную величину  $h$ , мы получим, очевидно, проекции другого четырехмерного вектора  $\vec{k}$

$$\begin{aligned}
 k_1 &= k_x \\
 k_2 &= k_y \\
 k_3 &= k_z \\
 k_4 &= \frac{i}{c} \omega,
 \end{aligned} \quad (14.14)$$

который принято называть четырехмерным волновым вектором. Нетрудно обнаружить, что квадрат этого вектора равен нулю.

В самом деле:

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Вспоминая теперь, что

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c},$$

мы убеждаемся в том, что

$$\sum_{i=1}^4 k_i^2 = 0.$$

Это полностью согласуется с равенством (8.14) для квадрата четырехмерного импульса

$$\sum_{i=1}^4 P_i^2 = -m_0^2 c^2,$$

так как для фотона  $m_0 = 0$ , то  $\sum_{i=1}^n P_i^2$ , а следовательно, и  $\sum_{i=1}^n k_i^2$  также должны быть равны нулю.

Чтобы еще раз проиллюстрировать плодотворность четырехмерной трактовки теории относительности, исследуем, как меняется направление светового луча и частота световых колебаний при переходе от одной системы отсчета к другой, используя понятие четырехмерного волнового вектора. Мы придем таким образом к уже известным нам формулам для угла аберрации и для изменения частоты в результате эффекта Доплера.

Пусть в системе  $k$  излучающее тело покоится и направление светового луча лежит в плоскости  $XOY$  и составляет с осью  $OX$  угол  $\alpha$ . Тогда проекции волнового вектора равны

$$k_1 = k \cos \alpha = \frac{\omega}{c} \cos \alpha$$

$$k_2 = k \sin \alpha = \frac{\omega}{c} \sin \alpha$$

$$k_3 = k_z = 0$$

$$k_4 = i \frac{\omega}{c}.$$

Перейдем теперь к системе  $k'$ , которая движется со скоростью  $-v$  по отношению к  $k$  (в этой системе излучающее тело движется со скоростью  $v$ ). В этой системе отсчета проекции четырехмерного волнового вектора будут равны

$$\begin{aligned}k'_1 &= k' \cos \alpha' = \frac{\omega'}{c} \cos \alpha' \\k'_2 &= k' \sin \alpha' = \frac{\omega'}{c} \sin \alpha' \\k'_3 &= 0 \\k'_4 &= i \frac{\omega'}{c}.\end{aligned}$$

Запишем формулы преобразований Лорентца для компонент четырехмерного волнового вектора (мы меняем в них знак величины  $\beta$ , так как скорость системы  $k'$  по отношению к  $k$  равна  $-v$ )

$$\begin{aligned}k'_1 &= \frac{k_1 - i\beta k_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\k'_2 &= k_2 \\k'_3 &= k_3 \\k'_4 &= \frac{k_4 + i\beta k_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.\end{aligned}$$

Подставляя значения компонент вектора  $k_i$  и  $k'_i$ , будем иметь

$$\omega' \cos \alpha' = \frac{\omega (\cos \alpha + \beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad (15.14)$$

$$\omega' \sin \alpha' = \omega \sin \alpha; \quad (16.14)$$

$$\omega' = \frac{\omega (1 + \beta \cos \alpha)}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (17.14)$$

Мы видим, что при переходе к другой системе отсчета изменяется как направление светового луча, так и частота световых колебаний.

Поделив уравнение (16.14) на (15.14), мы исключим частоты и получим

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sin \alpha \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \alpha + \beta}.$$

Рассмотрим так же, как в § 7, простейший случай звезды, находящейся в зените ( $\alpha = 90^\circ$ ). Тогда имеем

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta}.$$

Вводя вместо угла  $\alpha'$  дополнительный к нему угол абберрации  $\varphi$ , получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} \alpha' = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

т. е. уже известную нам формулу параграфа 7. Формула (17.14) показывает, как меняется частота световых колебаний при переходе от системы  $k$  к системе  $k'$ , и представляет собой, следовательно, формулу эффекта Допплера.

Не следует удивляться тому, что она не совпадает с формулой (20.13) предыдущего параграфа — в формуле (20.13) угол  $\varphi$  измерялся в той системе отсчета, в которой излучающий атом двигался со скоростью  $v$ , т. е. в системе  $k'$  этого параграфа и, следовательно, в обозначениях этого параграфа  $\varphi = \alpha'$ .

Поделив равенство (15.14) на (17.14), получим

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha + \beta}{1 + \beta \cdot \cos \alpha},$$

откуда

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha' - \beta}{1 - \beta \cos \alpha'}.$$

Подставляя это значение  $\cos \alpha$  в (17.14), получим формулу

$$\omega' = \omega \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \alpha},$$

совпадающую с формулой (20.13).

Перейдем теперь к центральной задаче этого параграфа — к доказательству релятивистской инвариантности уравнения движения теории относительности

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = \vec{F}. \quad (18.14)$$

Перейдем в левой части от дифференцирования по лабораторному времени  $t$  к дифференцированию по инвариантному собственному времени частицы  $\tau$ . Пользуясь соотноше-

нием  $t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , получим:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \cdot \frac{d}{d\tau} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{d}{d\tau}.$$

Тогда в проекциях на координатные оси уравнение (18.14) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) &= \frac{F_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ \frac{d}{d\tau} \left( \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) &= \frac{F_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ \frac{d}{d\tau} \left( \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) &= \frac{F_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (19.14)$$

Мы видим, что под знаком производной в левой части стоят первые три проекции четырехмерного вектора энергии-импульса. Так как дифференцирование ведется по инвариантному времени, то левые части уравнений (19.14) в целом тоже представляют собой первые три проекции четырехмерного вектора, а следовательно, и величины

$$\frac{F_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad \frac{F_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad \frac{F_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

являются проекциями  $f_1, f_2, f_3$  четырехмерного вектора, который мы будем называть вектором четырехмерной силы (или вектором Минковского). Итак, равенства (19.14) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (m_0 u_1) &= f_1 \\ \frac{d}{d\tau} (m_0 u_2) &= f_2 \\ \frac{d}{d\tau} (m_0 u_3) &= f_3, \end{aligned} \quad (20.14)$$

где первые три проекции силы Минковского связаны с проекциями обычной трехмерной силы соотношениями

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{F_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ f_2 &= \frac{F_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ f_3 &= \frac{F_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (21.14)$$

Посмотрим теперь, какой физический смысл имеет равенство четвертых компонент  $\frac{d}{d\tau}(m_0 u_4)$  и  $f_4$ . Четвертое уравнение системы (20.14) имеет вид

$$\frac{d}{d\tau}(m_0 u_4) = f_4. \quad (20 \text{ а. } 14)$$

Умножая равенства (20.14) и (20а.14) соответственно на  $u_1, u_2, u_3, u_4$  и складывая, получим

$$f_1 u_1 + f_2 u_2 + f_3 u_3 + f_4 u_4 = \frac{m_0}{2} \frac{d}{d\tau} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2).$$

Вспоминая, что сумма квадратов проекций четырехмерной скорости постоянна и равна  $-c^2$  (равенство 4.14), мы убеждаемся, что

$$f_1 u_1 + f_2 u_2 + f_3 u_3 + f_4 u_4 = 0,$$

откуда

$$f_4 = - \frac{f_1 u_1 + f_2 u_2 + f_3 u_3}{u_4}.$$

Подставляя значения проекций силы Минковского из (21.14) и проекций четырехмерной скорости из (3.14), получим

$$f_4 = \frac{i}{c} \cdot \frac{F_x u_x + F_y u_y + F_z u_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{i}{c} \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (21 \text{ а. } 14)$$

где скалярное произведение  $\vec{F} \cdot \vec{u} = F \cdot dr \cdot \cos \alpha$  есть работа силы  $F$ , отнесенная к единице времени, или мощность.

Подставляя в уравнение (20а.14) значение проекции  $f_4$  и  $u_4$ , получим

$$\frac{i}{c} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = \frac{i}{c} \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Переходя теперь к лабораторному времени  $t, d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ , получим окончательно уравнение

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) = \vec{F} \cdot \vec{u}, \quad (22.14)$$

выражающее основное свойство энергии: изменение энергии за единицу времени равно мощности.

Рассмотрим преобразование Лорентца для силы Минковского и ограничимся случаем, когда в системе  $k$  частица покоится ( $u=0$ ). В этой системе имеем

$$f_1=F_x; \quad f_2=F_y; \quad f_3=F_z; \quad f_4=0.$$

В системе  $k'$ , движущейся со скоростью  $v$ , будем тогда иметь

$$\begin{aligned} f'_1 &= \frac{F'_x}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{F_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ f'_2 &= \frac{F'_y}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} = F_y \\ f'_3 &= \frac{F'_z}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} = F_z \\ f'_4 &= \frac{i}{c} \frac{\vec{F}' \cdot \vec{u}'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} = -\frac{i \frac{v}{c} F_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Учитывая, что по теореме сложения скоростей  $u_x'=-v$ ,  $u_y'=u_z'=0$ , получим из первых трех равенств закон преобразования трехмерной силы

$$\begin{aligned} F'_x &= F_x \\ F'_y &= F_y \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ F'_z &= F_z \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \end{aligned} \quad (23.14)$$

Четвертое равенство, как нетрудно видеть, выполняется тождественно.

Мы видим, что проекции трехмерной силы не являются инвариантами преобразования Лорентца. В отличие от классической механики, в которой сила считалась абсолютной, в теории относительности проекции силы, перпендикулярные к направлению относительной скорости систем отсчета, различны в различных системах отсчета. Максимальное значение эти проекции имеют в той системе отсчета, в кото-

рой частица покоится. Нетрудно видеть, что при малых скоростях  $v \ll c$  мы имеем приближенную инвариантность силы  $F'_y \approx F_y$ ,  $F'_z \approx F_z$ . Наоборот, при скоростях, близких к скорости света, перпендикулярные к направлению движения проекции силы стремятся к нулю, и сила становится направленной параллельно скорости.

Итак, в четырехмерных обозначениях релятивистские уравнения Ньютона могут быть записаны в следующем виде

$$\frac{d}{d\tau} (m_0 u_i) = f_i. \quad (24.14)$$

В этой записи релятивистская инвариантность его становится совершенно очевидной. Действительно, поскольку в левой и правой частях уравнений (24.14) стоят проекции четырехмерных векторов, то при преобразовании Лорентца левая и правая части изменяются по одному и тому же закону и равенства (24.14) имеют место в любой системе отсчета. Мы видели, что введение четырехмерных векторов (скорости, энергии-импульса, силы Минковского) оказалось чрезвычайно плодотворным. Этим приемом нам придется широко пользоваться и в следующей главе.

Поэтому в заключение этого параграфа мы сформулируем общее понятие четырехмерного вектора и четырехмерного скаляра (инварианта).

Мы будем говорить, что четверка чисел  $A_1, A_2, A_3, A_4$  образует четырехмерный вектор  $\vec{A}$ , если при переходе от одной галилеевой системы отсчета к другой они изменяются так же, как  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , т. е. по закону

$$\begin{aligned} A'_1 &= \frac{A_1 + i\beta A_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ A'_2 &= A_2 \\ A'_3 &= A_3 \\ A'_4 &= \frac{A_4 - i\beta A_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \quad (25.14)$$

Четырехмерным скаляром мы будем называть величину, которая имеет одно и то же значение во всех галилеевых системах отсчета (не меняется при преобразовании Лорентца).

Пользуясь преобразованиями (25.14) для произвольного четырехмерного вектора, нетрудно показать (мы предоставляем это сделать читателю в качестве упражнения), что

четырёхмерное скалярное произведение двух векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ , равно

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4,$$

и четырёхмерная дивергенция вектора  $\vec{A}$ , равная

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{\partial A_4}{\partial x_4},$$

представляют собой инварианты преобразований Лорентца:

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \text{инвариант},$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \text{инвариант}.$$

---

## ГЛАВА IV

### ТЕОРИЯ ПОЛЯ

#### § 15. Уравнения Максвелла — Лорентца и их интегрирование

Теория относительности исторически возникла из потребности сформулировать законы, управляющие поведением электромагнитного поля в прямолинейно и равномерно движущихся лабораториях. Интересно отметить, что первая работа Эйнштейна по теории относительности и называлась «К электродинамике движущихся сред». Из опыта хорошо известно, что если в одной такой лаборатории имеется, например, только электрическое поле, то в другой лаборатории, движущейся по отношению к первой, возникнет и поле магнитное. В самом деле покоящийся в системе  $k$  заряд создает электростатическое поле, однако в системе  $k'$  этот заряд обладает скоростью, т. е. представляет собой электрический ток и, следовательно, создает магнитное поле.

Между тем по первому постулату теории относительности все физические явления должны в обеих лабораториях протекать одинаково, несмотря на то что в одной из них существует только электрическое поле, а в другой и электрическое и магнитное. Это значит, что основная система уравнений электродинамики — система уравнений Максвелла — Лорентца должна быть инвариантной.

Вспомним теперь, что уравнения релятивистской динамики, которые мы получили сначала в трехмерной форме (релятивистское уравнение Ньютона), мы в предыдущем параграфе записали в четырехмерной форме (уравнение Минковского), после чего их инвариантность стала очевидной.

Покажем теперь, что и система уравнений электродинамики может быть записана в четырехмерной форме, тем самым будет разрешен вопрос об инвариантности этой системы.

Напомним прежде всего читателю систему уравнений Максвелла — Лорентца для системы зарядов, находящихся в вакууме

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

В этой системе векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  представляют собой напряженности электрического и магнитного полей соответственно,  $\rho$  — плотность электрического заряда (заряд, отнесенный к единице объема) и  $\vec{j}$  — вектор плотности электрического тока, связанный с плотностью заряда формулой  $\vec{j} = \rho \vec{u}$ , где  $\vec{u}$  — скорость заряда.  $\rho$  и  $\vec{j}$  отличны от нуля только в тех областях пространства, которые заняты зарядами.

Вспомним определения понятий  $\operatorname{div} \vec{B}$  (дивергенция, или расходимость, вектора  $\vec{B}$ ) и  $\operatorname{rot} \vec{B}$  (ротатор, или вихрь, вектора  $\vec{B}$ ), где  $\vec{B}$  — произвольный вектор:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}; \\ \operatorname{rot}_x \vec{B} &= \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}; \\ \operatorname{rot}_y \vec{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}; \\ \operatorname{rot}_z \vec{B} &= \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}. \end{aligned}$$

Запишем теперь уравнения (1.15) в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 4\pi\rho; \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{4\pi}{c} j_x + \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \frac{4\pi}{c} j_y + \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}; \\
\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \frac{4\pi}{c} j_z + \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}; \\
\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} &= 0; \\
\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t}; \\
\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}; \\
\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{1a.15}$$

Следствием системы уравнений (1.15) или (1a.15) является так называемое уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения электрического заряда.

Действительно, дифференцируя первое уравнение системы (1.15) по времени, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{E}) = 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Применяя ко второму уравнению этой системы операцию  $\operatorname{div}$  и учитывая, что  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = 0$ , будем иметь (меняя во втором члене местами операции  $\frac{\partial}{\partial t}$  и  $\operatorname{div}$ )

$$\frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{E}) = 0.$$

Исключая из двух последних уравнений  $\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{E})$ , получим окончательно

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{2.15}$$

Физический смысл этого равенства таков: изменение плотности заряда в данной точке пространства  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)$  может происходить только за счет втекания или вытекания электрического тока в этой точке.

Существует весьма удобный метод интегрирования системы уравнений (1.15), основанный на введении двух вспомогательных величин — так называемого скалярного потенциала  $\varphi$  и векторного потенциала  $\vec{A}$ .

Для того чтобы удовлетворить третьему уравнению системы (1.15), положим

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (3.15)$$

Тогда третье уравнение будет тождественно удовлетворено. Подставляя значение  $\vec{H}$  из (3.15) в четвертое уравнение системы (1.15), получим

$$\text{rot} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Это уравнение будет удовлетворено, если мы положим

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi,$$

где  $\varphi$  — скалярная величина (мы пользуемся здесь известным из векторного анализа тождеством  $\text{rot grad } \varphi \equiv 0$ ). Отсюда будем иметь

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (4.15)$$

Уравнения (3.15) и (4.15) позволяют выразить напряженности  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , если известны скалярный потенциал и векторный потенциал.

Подставляя (3.15) и (4.15) в первые два уравнения системы (1.15), получим:

$$\begin{aligned} -\text{div grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{A}) &= 4\pi\rho; \\ \text{rot rot } \vec{A} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \varphi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Пользуясь известными из векторного анализа формулами

$$\text{div grad } \varphi = \Delta\varphi;$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta\vec{A},$$

где  $\Delta$  — символ оператора Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

преобразуем эти уравнения к виду

$$\begin{aligned} \Delta\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{A}) &= -4\pi\rho; \\ \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left( \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \end{aligned}$$

Прибавим и вычтем из левой части первого из этих уравнений слагаемое  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ . Тогда получим

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -4\pi r;$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \left( \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (5.15)$$

Мы видим, что система (5.15) значительно упростилась бы (в частности, уравнения для определения  $\varphi$  и  $\vec{A}$  стали бы независимыми друг от друга), если бы исчезли третьи слагаемые в их левых частях.

Обратим теперь внимание на то, что уравнение (3.15) не определяет однозначно векторный потенциал  $\vec{A}$ . Мы можем ввести другой векторный потенциал  $\vec{A}'$ , отличающийся от  $\vec{A}$  на градиент произвольной функции  $f(x, y, z, t)$ :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} f, \quad (6.15)$$

и уравнение  $\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}'$  останется в силе ( $\operatorname{rot} \vec{A}' = \operatorname{rot} \vec{A}$ , так как  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f \equiv 0$ ).

Тогда, чтобы не изменилось значение  $\vec{E}$ , мы должны будем изменить одновременно и скалярный потенциал, вычтя из него слагаемое  $\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$ :

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (7.15)$$

Тогда будем иметь

$$-\operatorname{grad} \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi + \frac{1}{c} \operatorname{grad} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) -$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{grad} f),$$

так как операции  $\frac{\partial}{\partial t}$  и  $\operatorname{grad}$  перестановочны, то второе и четвертое слагаемые правой части взаимно уничтожают друг друга и мы получаем

$$-\operatorname{grad} \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}.$$

Итак, не меняя физически измеримых величин  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , мы можем подвергнуть скалярный и векторный потенциал

преобразованиям (6.15) и (7.15), которые носят название градиентных преобразований.

Пользуясь этим произволом в определении  $\vec{A}$  и  $\varphi$ , наложим теперь на них дополнительное условие

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (8.15)$$

которое носит название условия Лорентца.

Тогда уравнения для определения потенциалов приобретают совершенно симметричный вид:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho; \\ \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \end{aligned} \quad (9.15)$$

В математике уравнения такого типа носят название уравнений Даламбера.

Итак, система уравнений (9.15) для потенциалов  $\varphi$  и  $\vec{A}$  с дополнительным условием (8.15) совместно с уравнениями (3.15) и (4.15), связывающими потенциалы с напряженностями электрического и магнитного полей, совершенно эквивалентна системе уравнений Максвелла — Лорентца.

Система уравнений (9.15) с условием (8.15) обладает, однако, тем преимуществом, что доказательство ее инвариантности по отношению к преобразованиям Лорентца гораздо легче провести, чем для системы уравнений Максвелла — Лорентца.

Для этой цели в следующем параграфе мы поставим себе задачу записать систему (9.15) с условием (8.15) в четырехмерном виде.

## § 16. Четырехмерные векторы плотности тока и потенциала

Рассмотрим уравнение непрерывности, выведенное нами в предыдущем параграфе в раскрытом виде

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

и преобразуем его, введя координаты Минковского

$$x_1 = x; \quad x_2 = y; \quad x_3 = z; \quad x_4 = ict.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x_4}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x_4} = i \cdot c \frac{\partial}{\partial x_4},$$

мы получаем

$$\frac{\partial j_x}{\partial x_1} + \frac{\partial j_y}{\partial x_2} + \frac{\partial j_z}{\partial x_3} + \frac{\partial (ic\rho)}{\partial x_4} = 0. \quad (1.16)$$

Это равенство должно быть равенством инвариантным, т. е. должно оставаться справедливым в любой системе отсчета (поскольку оно выражает закон сохранения электрического заряда, верный в любой системе отсчета). Мы можем отсюда заключить, что величины  $j_x, j_y, j_z, ic\rho$  представляют собой компоненты четырехмерного вектора, который мы будем обозначать  $\vec{j}$  и называть четырехмерным вектором плотности тока

$$j_1 = j_x; \quad j_2 = j_y; \quad j_3 = j_z; \quad j_4 = ic\rho. \quad (2.16)$$

Тогда равенство (1.16) есть условие равенства нулю четырехмерной дивергенции этого вектора

$$\text{div } \vec{j} = 0.$$

Отсюда следует, что компоненты трехмерного вектора плотности тока и плотность электрического заряда не являются величинами абсолютными, а зависят от системы отсчета.

Пусть в системе  $k$  заряд находится в покое, тогда в этой системе имеем

$$j_1 = j_2 = j_3 = 0; \quad j_4 = ic\rho.$$

Перейдем к системе отсчета  $k'$ , движущейся по отношению к  $k$  со скоростью  $-v$  (заряд в этой системе движется со скоростью  $v$ ). Обозначим проекции четырехмерного вектора плотности тока в этой системе

$$j'_1 = j_x; \quad j'_2 = j_y; \quad j'_3 = j_z; \quad j'_4 = ic\rho.$$

Подставляя эти значения в формулы преобразования Лорентца (с измененным знаком перед  $\beta$ ), получим

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{\rho_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ j_y &= j_z = 0 \\ \rho &= \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Мы имеем здесь, как видно из формулы (3.16), два эффекта. Во-первых, в новой системе отсчета возникает ток, что естественно, так как в системе  $k'$  заряд движется. Этот эффект имеет место и в нерелятивистском приближении ( $\frac{v}{c} \ll 1$ ); в самом деле, пренебрегая величиной  $\frac{v^2}{c^2}$  в первой из формул (3.16), получим

$$j_x = \rho_0 v.$$

Второй значительно более интересный эффект заключается в том, что величина плотности заряда в системе  $k'$  оказывается увеличенной в  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  раз по сравнению с  $\rho_0$ . Этот

эффект имеет место только в релятивистской области. Как видно из последней формулы (3.16), при  $v \ll c$  имеем

$$\rho \approx \rho_0,$$

т. е. в классической физике плотность заряда абсолютна.

Отметим следующее важное обстоятельство: при движении объем, в котором заключен заряд, испытывает релятивистское сокращение в продольном направлении. Благодаря этому величина объема, находящегося в движении, в  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  раз меньше, чем объема  $dV_0$ , находящегося в покое:

$$dV = dV_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Величина полного заряда, находящегося в объеме  $dV$ , равна произведению плотности заряда на объем

$$dq = \rho dV = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot dV_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \rho_0 dV_0 = dq_0.$$

Мы видим, таким образом, что электрический заряд любого тела (в частности, заряд элементарных частиц, например электрона) есть величина инвариантная.

Для того чтобы продвинуться дальше, нам нужно заняться вопросом о том, как меняется вид некоторых операторов при переходе от одной системы отсчета к другой (при четырехмерном вращении, или преобразовании Лорентца).

Рассмотрим прежде всего операции дифференцирования по координатам Минковского  $\frac{\partial}{\partial x_1}$ ;  $\frac{\partial}{\partial x_2}$ ;  $\frac{\partial}{\partial x_3}$ ;  $\frac{\partial}{\partial x_4}$ . По общим

правилам дифференциального исчисления при переходе к системе отсчета  $k'$  будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'_1} &= \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x'_1} \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial x_4}{\partial x'_1} \frac{\partial}{\partial x_4} \\ \frac{\partial}{\partial x'_2} &= \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x'_2} \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial x_4}{\partial x'_2} \frac{\partial}{\partial x_4} \\ \frac{\partial}{\partial x'_3} &= \frac{\partial x_1}{\partial x'_3} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x'_3} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x'_3} \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial x_4}{\partial x'_3} \frac{\partial}{\partial x_4} \\ \frac{\partial}{\partial x'_4} &= \frac{\partial x_1}{\partial x'_4} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x'_4} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x'_4} \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial x_4}{\partial x'_4} \frac{\partial}{\partial x_4}. \end{aligned}$$

Используя преобразования Лорентца для координат Минковского

$$x_1 = \frac{x'_1 - i\beta x'_4}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad x_2 = x'_2; \quad x_3 = x'_3; \quad x_4 = \frac{x'_4 + i\beta x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'_1} &= \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} + i\beta \frac{\partial}{\partial x_4}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \frac{\partial}{\partial x'_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x'_3} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x'_4} &= \frac{\frac{\partial}{\partial x_4} - i\beta \frac{\partial}{\partial x_1}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Мы видим, что операторы  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}$  меняются при преобразовании Лорентца так же, как величины  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Мы можем поэтому сказать, что операторы  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}$  образуют символический (операторный) четырехмерный вектор, который (по аналогии с трехмерным оператором  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ ) мы будем называть вектором четырехмерного градиента. Это значит, что величины (а не операторы!)  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial f}{\partial x_4}$ , где  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  — произвольная функция координат  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , образуют обычный (уже не символический) четырехмерный вектор.

Если образовать скалярное произведение вектора четырехмерного градиента самого на себя, т. е. выражение

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4} \cdot \frac{\partial}{\partial x_4} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2},$$

то оно будет, очевидно, представлять собой инвариантный (скалярный) оператор (мы указывали в конце предыдущего параграфа, что скалярное произведение двух четырехмерных векторов есть инвариант). Этот оператор по аналогии с оператором

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

получил название четырехмерного оператора Лапласа и обозначается символом  $\square$

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}.$$

Если вернуться от координат Минковского к действительным координатам  $x, y, z, t$ , то этот оператор примет следующий вид:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (5.16)$$

Вернемся теперь к уравнениям (9.15)

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j};$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho.$$

Вводя инвариантный четырехмерный лапласиан  $\square$  и умножая второе уравнение этой системы на  $i$ , мы можем подробнее записать эту систему в виде

$$\begin{aligned} \square A_x &= -\frac{4\pi}{c} j_x \\ \square A_y &= -\frac{4\pi}{c} j_y \\ \square A_z &= -\frac{4\pi}{c} j_z \\ \square (i\varphi) &= -\frac{4\pi}{c} (ic\rho). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Мы уже показали, что величины  $j_x, j_y, j_z, ic\rho$  образуют четырехмерный вектор плотности тока. Система (6.16) показывает нам теперь, что величины  $A_x, A_y, A_z, i\varphi$  образуют также четырехмерный вектор  $A$ , проекции которого равны

$$A_1 = A_x; A_2 = A_y; A_3 = A_z; A_4 = i\varphi.$$

Этот вектор принято называть четырехмерным вектором-потенциалом. Вводя его, систему (6.16) или (9.15) можно записать в виде

$$\square \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (7.16)$$

При такой записи релятивистская инвариантность становится совершенно очевидной.

Так как и в левой и в правой частях стоят четырехмерные векторы, то при преобразовании Лорентца левая и правая части уравнения (7.16) меняются по одному и тому же закону и уравнение остается верным во всех галилеевых системах отсчета. То же самое, очевидно, относится и к дополнительному условию (8.15). Действительно, это условие

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

или

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

может быть записано в виде ( $A_4 = i\varphi, x_4 = ict$ ):

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{\partial A_4}{\partial x_4} = \operatorname{div} \vec{A} = 0.$$

Но, как мы упоминали в § 14, четырехмерная дивергенция любого вектора есть инвариант. Поэтому условие Лорентца, если оно выполнено в одной галилеевой системе отсчета, будет выполнено автоматически и в любой другой.

Обратимся теперь к уравнениям (3.15), (4.15), связывающим потенциалы  $\vec{A}$ ,  $\varphi$  и напряженности электрического и магнитного полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A};$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Вводя координаты Минковского и компоненты четырехмерного вектора-потенциала, мы можем записать первое равенство в проекциях в виде

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{\partial A_3}{\partial x_3} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \\ H_y &= \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \\ H_z &= \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Умножая второе равенство на мнимую единицу  $i$  и переписывая его в проекциях, получим

$$\begin{aligned} iE_x &= \frac{\partial A_1}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_1} \\ iE_y &= \frac{\partial A_2}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_2} \\ iE_z &= \frac{\partial A_3}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Формулы (8.16) и (9.16) позволяют таким образом выразить проекции векторов (трехмерных) напряженностей электрического (умноженного на  $i$ ) и магнитного полей единым образом через производные проекций четырехмерного вектора-потенциала.

Это обстоятельство чрезвычайно удобно формулируется, если ввести новое математическое понятие — понятие четырехмерного тензора. Мы, однако, в этой книге предпочитаем обойтись без математических осложнений и не будем вводить тензорный аппарат. Читателя, интересующегося этой стороной дела, мы отсылаем к другим руководствам.

Формулы (8.16), (9.16) позволяют установить, как преобразуются напряженности электрического и магнитного полей при переходе от одной системы отсчета к другой.

Нам известен закон преобразования производных  $\frac{\partial}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_2}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_3}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_4}$ , выраженный формулами (4.16), и закон преобразования проекций четырехмерного вектора-потенциала  $A$

$$\begin{aligned} A'_1 &= \frac{A_1 + i\beta A_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ A'_2 &= A_2 \\ A'_3 &= A_3 \\ A'_4 &= \frac{A_4 - i\beta A_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

С учетом этих формул закон преобразования проекций  $H_x, H_y, H_z$  будет выглядеть следующим образом:

$$H'_x = \frac{\partial A'_3}{\partial x'_2} - \frac{\partial A'_2}{\partial x'_3} = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = H_x;$$

$$H'_y = \frac{\partial A'_1}{\partial x'_3} - \frac{\partial A'_3}{\partial x'_1} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{A_1 + i\beta A_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) - \frac{\frac{\partial A_3}{\partial x_1} + i\beta \frac{\partial A_3}{\partial x_4}}{\sqrt{1 - \beta^2}} =$$

$$= \frac{\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} - i\beta \left( \frac{\partial A_3}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_3} \right)}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

На основании формул (8.16), (9.16) окончательно можем написать

$$H'_y = \frac{H_y + \beta E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Совершенно аналогично можем написать

$$H'_z = \frac{\frac{\partial A'_2}{\partial x'_1} - \frac{\partial A'_1}{\partial x'_2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\frac{\partial A_2}{\partial x_1} + i\beta \frac{\partial A_2}{\partial x_4} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} - i\beta \frac{\partial A_4}{\partial x_2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{H_z - \beta E_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Итак, закон преобразования проекций магнитного поля при переходах от одной системы отсчета к другой выражается формулами:

$$H'_x = H_x;$$

$$H'_y = \frac{H_y + \beta E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad H'_z = \frac{H_z - \beta E_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (10.16)$$

Совершенно таким же методом можно найти закон преобразования компонент напряженности электрического поля (мы предоставляем это сделать читателю):

$$E'_x = E_x;$$

$$E'_y = \frac{E_y - \beta H_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad E'_z = \frac{E_z + \beta H_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (11.16)$$

Формулы (10.16), (11.16) показывают, что сами понятия электрическое поле и магнитное поле являются понятиями относительными. Если в одной системе отсчета мы имеем только электрическое или только магнитное поле, то в другой системе, движущейся по отношению к первой, существует и то и другое поле.

Таким образом, существует одно абсолютное понятие — единое электромагнитное поле, а его разделение на электрическую и магнитную составляющие является относительным и зависит от того «языка» (системы отсчета), который мы выбираем для описания электромагнитного процесса.

Рассмотрим, например, электрический заряд, находящийся в покое в системе отсчета  $k$ . Он окружен электрическим полем, линии которого равномерно по всем направлениям расходятся вдоль радиусов. Как мы уже упоминали, в системе отсчета  $k'$ , движущейся справа налево по отношению к  $k$  со скоростью  $v$ , этот заряд будет двигаться со скоростью  $-v$  слева направо, и, следовательно, в системе  $k'$  будет существовать ток, направленный по оси  $OX$ . Этот ток будет окружен магнитными линиями, лежащими в плоскостях, параллельных плоскости  $YOZ$ , и представляющими собой концентрические окружности, центры которых лежат на оси  $OX$ .

Подтвердим это прямым расчетом.

Обратимся к формулам (10.16). В системе отсчета  $k$  заряд  $q$  покоится и создает чисто электрическое поле, напряженность которого равна  $\frac{q}{r^2}$  и направлена по радиусам от заряда (или к заряду, если он отрицательный).

Следовательно, в этой системе имеем

$$H_x = H_y = H_z = 0;$$

$$E_x = \frac{q}{x^2 + y^2 + z^2} \cos \alpha = -\frac{q \cdot x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$E_y = \frac{q}{x^2 + y^2 + z^2} \cos \beta = -\frac{q y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$E_z = \frac{q}{x^2 + y^2 + z^2} \cos \gamma = -\frac{q z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

На основании формул (10.16) будем иметь в системе  $k'$

$$H'_x = 0;$$

$$H'_y = \frac{\beta E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\beta q z}{\sqrt{1 - \beta^2} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$H'_z = -\frac{\beta E_y}{\sqrt{1 - \beta^2}} = -\frac{\beta q y}{\sqrt{1 - \beta^2} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Итак, в системе  $k'$  возникает магнитное поле, линии которого лежат в плоскостях, перпендикулярных к направлению движения. Убедимся в том, что эти линии представляют собой окружности. Поделив два последних равенства друг на друга, получим

$$\frac{H'_y}{H'_z} = -\frac{z}{y}.$$

Так как на основании формул преобразований Лоренца

$$z' = z; \quad y' = y,$$

то это равенство в системе отсчета  $k'$  выглядит так

$$\frac{H'_y}{H'_z} = -\frac{z'}{y'}.$$

Дифференциальное уравнение силовых линий магнитного поля записывается следующим образом:

$$\frac{dy'}{dz'} = \frac{H'_y}{H'_z}$$

[это есть условие параллельности векторов  $\vec{H}'$  ( $H'_x, H'_y$ ) и  $d\vec{r}'(dy', dz')$ ].

Отсюда получаем

$$\frac{dy'}{dz'} = -\frac{z'}{y'}$$

или

$$y'dy' + z'dz' = 0,$$

откуда, интегрируя, будем иметь

$$y'^2 + z'^2 = R^2,$$

т. е. уравнение окружности с центром на оси  $OX$ . При переходе к системе  $k'$  меняется и электрическое поле. Формулы (11.16) позволяют определить компоненты электрического поля в системе  $k'$

$$E'_x = E_x;$$

$$E'_y = \frac{E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad E'_z = \frac{E_z}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Мы видим, что продольное электрическое поле (проекция, параллельная направлению скорости) остается неизменной, в то время как поперечные составляющие поля  $E'_y, E'_z$  уве-

личиваются в  $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  раз. Это значит, что в системе  $k'$  электрическое поле уже не будет обладать сферической симметрией. С увеличением скорости движения поле все больше сосредоточивается в плоскости, перпендикулярной к направлению движения. Формулы (11.16) показывают нам, что существует и обратное явление: если в системе  $k$  существует только магнитное поле (созданное постоянным магнитом или проводником с током), а электрическое поле отсутствует ( $E_x=E_y=E_z=0$ ), то в системе отсчета  $k'$ , в которой источник магнитного поля движется, будет существовать и электрическое поле с составляющими

$$E'_x=0$$

$$E'_y = -\frac{\beta H_z}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$E'_z = \frac{\beta H_y}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

В векторной форме эти уравнения могут быть записаны следующим образом:

$$E' = \frac{1}{c} \frac{[\vec{v}, \vec{H}]}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$(v_y=v_z=0, \quad v_x=v).$$

После создания теории относительности выяснилось, что этот эффект давно известен в физике и применяется в так называемой униполярной машине для получения электрического тока. Отсутствовало лишь понимание того, что мы имеем здесь дело с релятивистским эффектом.

Рассмотрим следующую упрощенную схему униполярной машины.

Железный брусок  $A$ , намагниченный в направлении, перпендикулярном к его верхнему и нижнему основанию, движется слева направо со скоростью  $v$  (см. рис. 38) (в реальной униполярной машине используется не поступательное, а вращательное движение, что оказывается более удобным в техническом отношении, но не имеет принципиального значения).

В системе отсчета  $k$ , в которой брусок покоится, существует только магнитное поле, которое внутри бруска и вблизи его поверхности направлено по оси  $OZ$ :

$$H_x = H_y = 0; H_z = H.$$

В системе  $k'$ , в которой брусок движется со скоростью  $v$  (сама система  $k'$  движется по отношению к  $k$  со скоростью  $-v$ ), мы будем иметь электрическое поле с проекциями

$$E'_x = 0; E'_y = \frac{\beta H}{\sqrt{1 - \beta^2}}; E'_z = 0,$$

направленное по оси  $OY$ .

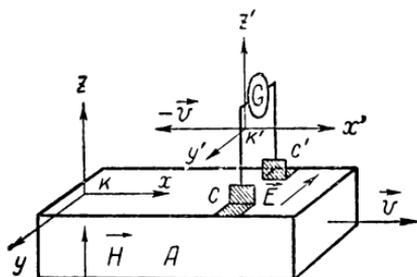


Рис. 38.

Это электрическое поле приводит в движение электроны, и если к верхней грани приложить скользящие контакты  $C$  и  $C'$ , то в цепи  $C' -$  гальванометр  $G - C$  возникнет электрический ток.

Таким образом, речь идет здесь не о малом, трудно измеримом эффекте, а о техническом приеме, позволяющем получать значительные по величине токи (до нескольких ампер).

Мы уже знаем из ряда примеров, что в теории относительности наряду с рядом относительных величин существуют и величины абсолютные (инвариантные). Так координаты и время событий  $x, y, z, t$  относительны, в то время как интервалы

$$\Delta S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2,$$

разделяющие события, абсолютны.

Аналогичным образом для электромагнитного поля из относительных величин  $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$  можно построить инвариантные величины. Можно доказать (мы не будем на этом останавливаться), что существует только два инварианта электромагнитного поля, равные

$$I_1 = H^2 - E^2 = H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 - E_x^2 - E_y^2 - E_z^2,$$

$$I_2 = (\vec{H} \cdot \vec{E}) = H_x E_x + H_y E_y + H_z E_z.$$

Доказательство их инвариантности, т. е. доказательство равенств

$$H_x'^2 + H_y'^2 + H_z'^2 - E_x'^2 - E_y'^2 - E_z'^2 = H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 - E_x^2 - E_y^2 - E_z^2,$$

$$H_x' E_x' + H_y' E_y' + H_z' E_z' = H_x E_x + H_y E_y + H_z E_z,$$

можно очень просто провести с помощью формул (10.16) и (11.16) и мы предоставляем это сделать читателю. В связи с вышеизложенным мы можем все электромагнитные поля разделить на три класса:

1) Поля, у которых  $I_1 = H^2 - E^2 > 0$ . Такие поля мы будем называть магнитоподобными. В этом случае можно подобрать такую систему отсчета, в которой электрическое поле отсутствует, но ни в одной системе отсчета нельзя устранить магнитное поле (так как в такой системе отсчета мы имели бы  $I_1 = -E^2 > 0$ ).

2) Поля, у которых  $I_1 = H^2 - E^2 < 0$ . Такие поля мы будем называть электроподобными. В этом случае существует такая система отсчета, в которой отсутствует магнитное поле, однако ни в одной системе отсчета не может отсутствовать поле электрическое (так как в этой системе мы имели бы  $I_1 = H^2 < 0$ ).

3) Поле, для которого  $I_1 = 0, E = H$ .

Особый интерес представляет тот частный случай, когда и второй инвариант поля тоже равен нулю  $I_2 = (\vec{E}, \vec{H}) = 0$ . Физически это означает, что вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перпендикулярны друг другу.

Указанные два свойства — равенство напряженностей электрического и магнитного полей и их ортогональность характерны для электромагнитных волн (в частности, для световых волн). Инвариантность величин  $H^2 - E^2$  и  $(\vec{E}, \vec{H})$  указывает тогда на то, что два указанные свойства имеют место в любой системе отсчета. Мы приходим к выводу (ко-

торый естественно гармонирует со всем содержанием теории относительности), что понятие электромагнитной (в частности, световой) волны есть понятие инвариантное.

## § 17. Гравитационное поле. Принцип эквивалентности

Кроме электромагнитных полей, изученных нами в предыдущих параграфах, в природе существуют гравитационные поля, обуславливающие взаимное притяжение между любыми телами вселенной. Согласно закону всемирного тяготения, сформулированному Ньютоном, сила притяжения между двумя точечными частицами прямо пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

Заметим, что закон всемирного тяготения по форме совершенно аналогичен закону Кулона, определяющему взаимодействие электрических зарядов. Согласно этому закону сила взаимодействия между точечными заряженными телами прямо пропорциональна произведению электрических зарядов этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (1.17)$$

Следует отдать себе ясный отчет в том, что в законе всемирного тяготения масса тела выступает в совершенно новой функции: она определяет способность тел притягивать к себе окружающие тела и притягиваться к ним.

Если в уравнениях движения Ньютона масса фигурировала как мера инертности тела, то в уравнениях теории гравитационного поля масса характеризует совершенно иное свойство тела — она выступает (если воспользоваться аналогией с электростатическими взаимодействиями) как гравитационный заряд.

Совершенно очевидно, что поскольку речь идет о двух различных свойствах тела, которые могли бы оказаться совершенно несвязанными друг с другом, то, вообще говоря, должны быть введены две различные физические величины — инертная масса  $m$ , характеризующая степень инертности тела, и гравитационная масса  $\mu$ , характеризующая его гравитационный заряд.

При этом определением инертной массы  $m$  является второй закон Ньютона, согласно которому

$$F = ma. \quad (2.17)$$

а определением гравитационной массы  $\mu$  является закон всемирного тяготения. Если его записать в форме, аналогичной закону Кулона,

$$F = \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2}, \quad (3.17)$$

то гравитационная масса будет иметь ту же размерность, что и электрический заряд ( $M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$  или в *CGS* системе единиц  $g^{1/2} \text{ см}^{3/2} \text{ сек}^{-1}$ ).

Существует, однако, следующий фундаментальный закон природы, совершенно надежно установленный экспериментами: для всех тел природы гравитационная масса  $\mu$  и инертная масса  $m$  строго пропорциональны друг другу, т. е. для всех тел отношение гравитационной и инертной массы  $\frac{\mu}{m}$  одинаково и, следовательно, представляет собой некую универсальную постоянную.

В силу этого мы можем в уравнении закона всемирного тяготения (3.17) выразить гравитационную массу через инертную.

Обозначая отношение гравитационной и инертной массы через  $\sqrt{\gamma}$ ,

$$\frac{\mu}{m} = \sqrt{\gamma}$$

(заметим, что введенная таким образом мировая постоянная  $\gamma$  имеет размерность  $\left(\frac{\mu}{m}\right)^2$ , т. е.  $M^{-1}L^3$  или  $\frac{\text{см}^3}{g \cdot \text{сек}^2}$  в системе *CGS*), мы получим обычную запись закона всемирного тяготения

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (4.17)$$

Это значит, что при надлежащем выборе единиц измерения гравитационная масса и инертная масса становятся просто тождественными.

С этим фундаментальным фактом человек сталкивается с первых шагов своего существования: чем тяжелее тело (т. е. чем больше его гравитационная масса), тем труднее изменить его движение (тем больше его инертная масса). Поэтому представление о тождестве инертной и гравитационной массы настолько прочно укоренилось в сознании человека, что мы склонны забывать о том, что имеем дело с совершенно различными свойствами тела.

Поэтому следует отдать себе ясный отчет в том, что пропорциональность гравитационной и инертной масс отнюдь не является очевидным, само собой разумеющимся законом (он стал для нас таким в силу многовековой привычки человечества к этому обстоятельству), а является установленным опытным путем фактом.

Рассмотрим эксперименты, ведущие к установлению этого закона.

Рассмотрим тело, покоящееся на поверхности Земли.

Мы можем выразить вес этого тела (т. е. силу, с которой он притягивается к центру Земли) двумя способами: через его инертную массу с помощью второго закона Ньютона и через его тяжелую массу с помощью закона всемирного тяготения.

Обозначая вес тела  $P$ , инертную массу  $m$  и ускорение, сообщаемое телу силой тяжести,  $g$ , имеем по второму закону Ньютона

$$P = mg.$$

На основании закона всемирного тяготения получим

$$P = \frac{\mu\mu_0}{R^2},$$

где  $\mu$  — гравитационная масса тела,  $\mu_0$  — гравитационная масса Земли,  $R$  — радиус Земли.

Приравнявая правые части этих равенств, находим

$$mg = \frac{\mu\mu_0}{R^2},$$

откуда отношение гравитационной и инертной масс тела оказывается равным

$$\frac{\mu}{m} = g \cdot \frac{R^2}{\mu_0}. \quad (5.17)$$

Так как множитель  $\frac{R^2}{\mu_0}$  в правой части (5.17) одинаков для всех тел, то отношение гравитационной и инертной масс тела может зависеть только от того ускорения  $g$ , которое получает это тело под действием силы тяжести.

Установлено, однако, с колоссальной степенью точности, что в данной точке земной поверхности все тела получают под действием силы тяжести одно и то же ускорение независимо от массы тела, его формы, его химического состава и т. д. Проверка этого обстоятельства проводилась еще Ньютоном и основывалась на измерении периода кача-

ний математических маятников с одной и той же длиной.

Как известно, период малых качаний математического маятника зависит только от длины маятника  $l$  и ускорения силы тяжести  $g$  и определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

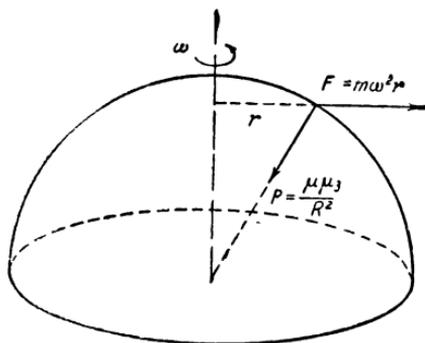


Рис. 39.

Поэтому при одинаковой длине маятников различие периодов колебания означало бы различие ускорений свободного падения для различных тел.

Опыты Ньютона и других ученых показали с большой точностью, что  $g$  одинаково для всех тел.

Еще более точный метод доказательства пропорциональности гравитационной и инертной масс был разработан Этвешом.

Рассматривая тело, покоящееся на поверхности Земли, мы не учитывали до сих пор вращения Земли вокруг своей оси.

Наличие этого вращения приводит к тому, что в системе отсчета, связанной с Землей, на это тело, помимо силы тяготения, направленной к центру Земли и равной  $\frac{\mu\mu_0}{R_0} = P$ , будет действовать также центробежная сила инерции, равная  $F_{ц} = m\omega^2 r$  и направленная по перпендикуляру к оси вращения Земли. Если тело находится не на экваторе, то эти две силы действуют не по одной прямой (рис. 39).

Существенно важно заметить, что сила притяжения пропорциональна гравитационной массе  $\mu$ , в то время как центробежная сила инерции пропорциональна инертной массе  $m$ . Поэтому если отношение гравитационной и инертной масс для разных тел различно, то равнодействующие силы тяготения и силы инерции для разных тел будут иметь различное направление.

Этвеш подвешивал к коромыслу крутильных весов две гири с одной и той же гравитационной массой (рис. 40). Если бы инертные массы были неодинаковы, то равнодействующие сил, приложенных к телам 1 и 2, не были бы

равны и возник бы вращательный момент, который вызвал бы поворот коромысла. Результат опытов Этвеша (с точностью до  $10^{-8}$ ) показал, что гравитационная и инертная массы всех тел совпадают.

Тождество гравитационной и инертной масс приводит к глубоко идущему следствию, которое и было положено Эйнштейном в основу общей теории относительности.

Речь идет о так называемом «принципе эквивалентности».

На протяжении всей этой книги до настоящего момента наши рассуждения базировались на специальном принципе относительности Эйнштейна, который формулировался нами следующим образом.

Никакие физические эксперименты (механические, тепловые, электромагнитные и т. д.) не позволяют установить, находится ли лаборатория в состоянии абсолютного равномерного и прямолинейного движения или нет.

Поставим теперь следующий естественный вопрос: можно ли обнаружить ускоренное движение лаборатории с помощью физических экспериментов, производимых внутри нее?

Представим себе лабораторию, чрезвычайно удаленную от всех небесных тел (в том числе и от Земли), так что гравитационное поле в этой лаборатории отсутствует и тела не имеют веса. В этой лаборатории понятия «верх» и «низ» не имеют смысла: тела будут в ней свободно висеть, не падая на стенки лаборатории (если они не обладают начальной скоростью), или двигаться равномерно и прямолинейно. Если к телу прикреплена пружина, то она будет ненапряжена и т. д.

Пусть теперь лаборатория получает постоянное ускорение  $\vec{a}$ , направленное, например, вверх (рис. 41).

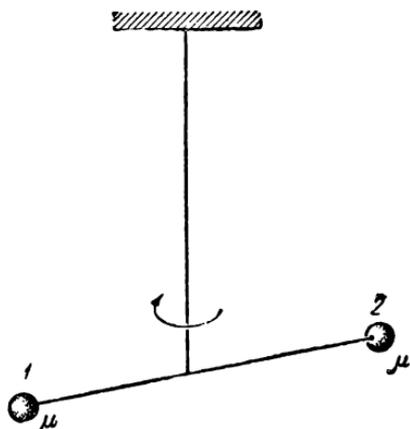


Рис. 40.

Тогда все тела, находящиеся в лаборатории, приобретут ускорения  $-\vec{a}$ , направленные к нижней стенке II, и будут двигаться с этим ускорением, если они свободны, либо вызовут натяжения пружин и нитей, если они закреплены.

В самом деле, зависимость между координатами тела в системе  $k'$ , связанной с ускоренно движущейся лабораторией, и координатами того же тела в системе отсчета  $k$ , связанной с покоившейся лабораторией, может быть выве-

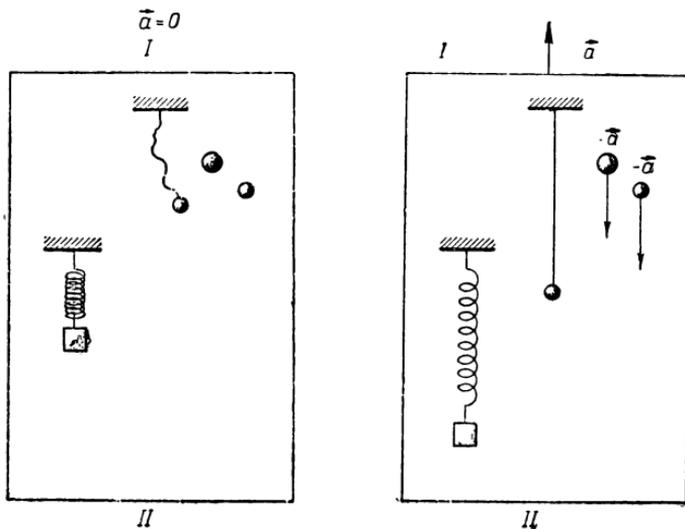


Рис. 41

дена очень просто (мы проводим здесь очевидное обобщение преобразований Галилея, а не Лорентца, так как ускоренное движение вызывает появление новых эффектов и в нерелятивистском приближении, т. е. и при  $v \ll c$ ).

Из рисунка 42 видно, что

$$\begin{aligned} y' &= y; \\ z' &= z; \\ x' &= x - OO'. \end{aligned}$$

Но  $OO'$  есть путь, пройденный началом системы  $k'$  по отношению к системе  $k$  за время  $t$  с постоянным ускорением  $a$  и без начальной скорости.

Следовательно,

$$OO' = \frac{at^2}{2},$$

и «словарь» для перехода от «языка» системы  $k$  к «языку» системы  $k'$  имеет вид

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{at^2}{2} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{6.17}$$

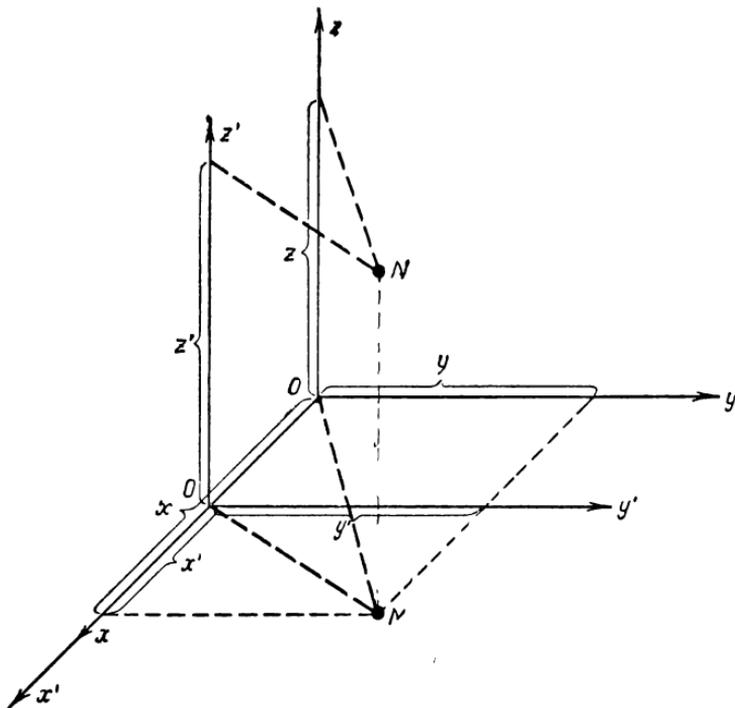


Рис. 42.

Отсюда, дифференцируя формулы (6.17) по времени, получим

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - at; \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt}; \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

или

$$u'_x = u_x - at; \quad u'_y = u_y; \quad u'_z = u_z. \tag{7.17}$$

Дифференцируя еще раз по времени, получим

$$\begin{aligned}\frac{d^2x'}{dt^2} &= \frac{d^2x}{dt^2} - a; \\ \frac{d^2y'}{dt^2} &= \frac{d^2y}{dt^2}; \\ \frac{d^2z'}{dt^2} &= \frac{d^2z}{dt^2}.\end{aligned}$$

В левой и правой частях этих формул стоят проекции  $W_x, W_y, W_z, W_x', W_y', W_z'$  ускорения тела в системах  $k$  и  $k'$ , соответственно и мы имеем

$$\begin{aligned}W_x' &= W_x - a; \\ W_y' &= W_y; \\ W_z' &= W_z.\end{aligned}\tag{8.17}$$

В векторной форме это равенство может быть записано в виде

$$\vec{W}' = \vec{W} - \vec{a}.\tag{8a.17}$$

Мы видим, что ускорение тела не является инвариантом по отношению к преобразованиям (6.17). Если в системе  $k$  мы имеем  $\vec{W} = 0$ , то из (8.17) видно, что в системе  $k'$  ускорение равно  $\vec{W}' = -\vec{a}$ .

В классической физике этот результат интерпретировался следующим образом.

В ускоренной системе отсчета второй закон Ньютона несправедлив. В самом деле, если в системе отсчета  $k$  мы имеем равенство

$$\vec{F} = m\vec{W},$$

то в системе отсчета  $k'$  равенство  $\vec{F} = m\vec{W}'$  уже не будет иметь место, так как на основании (8.17) имеем

$$\vec{F} = m\vec{W}' + m\vec{a}.\tag{9.17}$$

В частности, если в исходной системе отсчета  $k$  на тело не действуют никакие силы,  $\vec{F} = 0$ , то ускорение этого тела тоже равно нулю,  $\vec{W} = 0$  (закон инерции или первый закон Ньютона).

В ускоренной системе  $k'$  будем, однако, при  $\vec{F}=0$  иметь  $\vec{W}' = -\vec{a}$ , т. е. и первый закон Ньютона не имеет места в ускоренной системе отсчета — говорят, что ускоренная система отсчета есть система неинерциальная.

Если, однако, наряду с «истинной» силой  $\vec{F}$  ввести так называемую «силу инерции», равную  $-\vec{ma}$ ,

$$\vec{F}_{ин} = -\vec{ma},$$

то равенство (9.17) приобретает вид

$$\vec{F} + \vec{F}_{ин} = m\vec{W}', \quad (10.17)$$

т. е. формально мы можем сохранить в силе второй закон Ньютона, если в качестве полной силы в ускоренной системе отсчета введем векторную сумму «истинной» силы  $\vec{F}$  и «силы инерции»  $-\vec{ma}$ .

В частности, если «истинная» сила  $\vec{F}$  равна нулю, получим

$$\vec{F}_{ин} = m\vec{W}' = -\vec{ma}.$$

Ускорение, которое приобретают все свободные тела в ускоренной системе отсчета, определяется «силами инерции».

Заметим, что в классической механике сила инерции считается силой фиктивной, так как она не связана ни с каким реальным взаимодействием между телами и вводится формально для того, чтобы сохранить в силе второй и первый законы Ньютона.

Итак, в системе отсчета, движущейся прямолинейно с постоянным ускорением  $\vec{a}$ , на все тела действует «сила инерции», пропорциональная инертной массе тел и равная  $-\vec{ma}$ , в частности, все свободные тела под действием этой силы приобретают одно и то же ускорение  $-\vec{a}$ .

Поэтому, казалось бы, ответ на поставленный ранее вопрос о том, можно ли обнаружить ускоренное движение системы отсчета, должен быть положительным. В ускоренной системе отсчета, в отличие от системы инерциальной, действуют «силы инерции», которые, складываясь с «истинными» силами, вызывают ряд наблюдаемых эффектов (ускоренное

движение свободных тел, отклонение отвесов, натяжение пружин и нитей и т. д.).

Наблюдая наличие или отсутствие таких эффектов, казалось бы можно установить, находится лаборатория в состоянии ускоренного движения или нет. Однако такое заключение было бы чересчур поспешным. Эйнштейн приводит здесь следующие чрезвычайно глубокие рассуждения.

Равномерно ускоренное прямолинейное движение лаборатории вызывает совершенно такие же механические эффекты, как и однородное постоянное гравитационное поле.

Действительно, сила, действующая на частицу в таком поле, пропорциональна гравитационной массе тела (по закону всемирного тяготения  $F = \frac{m_1 m_2}{r^2}$ ). Но так как гравитационная и инертная масса тождественны, то «сила инерции» и гравитационная сила в этом отношении одинаковы. В частности, и гравитационная сила и сила инерции сообщают всем телам одно и то же ускорение.

Поэтому никакие физические эксперименты, проводимые внутри лаборатории, не позволяют отличить случай, когда покоящаяся (или равномерно и прямолинейно движущаяся) лаборатория находится в однородном и постоянном гравитационном поле, от случая, когда лаборатория движется равномерно-ускоренно, а гравитационное поле отсутствует.

Наблюдатель, находящийся в такой лаборатории, обнаружит, что все свободные тела начинают двигаться с одним и тем же ускорением  $\vec{a}$  по направлению к стенке II («падать»), пружины, к которым прикреплены тела, растягиваются, отвесы принимают «вертикальное» направление. Однако он не может однозначно решить (оставаясь внутри лаборатории), является ли причиной этих явлений то, что лаборатория начала двигаться равномерно-ускоренно, или то, что она попала в однородное гравитационное поле.

Отмеченная нами закономерность формулируется в виде так называемого принципа эквивалентности, которому (так же, как в свое время принципу относительности) мы можем придать утвердительную и отрицательную формы.

Утвердительная формулировка:

Все физические процессы протекают совершенно одинаково (при одинаковых условиях) в инерциальной системе отсчета, находящейся в однородном постоянном гравитационном

поле, и в системе отсчета, движущейся поступательно с постоянным ускорением при отсутствии гравитационного поля.

Отрицательная формулировка:

Никакие физические эксперименты, проводимые внутри лаборатории, не позволяют отличить случай, когда лаборатория движется поступательно с постоянным ускорением и гравитационное поле отсутствует, от случая, когда лаборатория находится в покое (или движется равномерно и прямолинейно) в постоянном и однородном гравитационном поле.

Отсюда, в частности, вытекает, что если в лаборатории гравитационное поле отсутствует, то, заставляя лабораторию двигаться с ускорением, можно «создать» в ней искусственное гравитационное поле. Наоборот, если лаборатория находится в однородном гравитационном поле, то, заставляя ее двигаться с ускорением, сообщаемым этим полем (предоставляя ей «падать» в этом поле), можно искусственно «уничтожить» гравитационное поле.

До сих пор мы говорили только о поступательном равномерно-ускоренном движении системы отсчета и видели, что такое движение «эквивалентно» однородному и постоянному гравитационному полю.

Однако принцип эквивалентности может быть обобщен на случай произвольного криволинейного ускоренного движения.

Рассмотрим в качестве простейшего примера переход к системе отсчета, равномерно вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $OZ$ .

Формулы перехода к новой системе отсчета («словарь») будут иметь, очевидно, следующий вид

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \\y' &= y \cos \varphi - x \sin \varphi \\z' &= z\end{aligned}$$

(мы имеем здесь в каждой плоскости, параллельной  $XOY$ , преобразование поворота, рассмотренное в § 3 главы I). При этом угол поворота  $\varphi$  равен

$$\varphi = \omega t$$

(мы считаем, что при  $t=0$  обе системы отсчета совпали). Поэтому окончательно получим

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \\y &= y' \cos \omega t + x' \sin \omega t \\z &= z'.\end{aligned}\tag{11.17}$$

Дифференцируя (11.17) дважды по времени, найдем формулы преобразования ускорения при переходе к равномерно вращающейся системе отсчета

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2x'}{dt'^2} \cos \omega t - \frac{d^2y'}{dt'^2} \sin \omega t - 2\omega \left[ \frac{dx'}{dt} \sin \omega t + \frac{dy'}{dt} \cos \omega t \right] - \\&\quad - \omega^2 [x' \cos \omega t - y' \sin \omega t]; \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2y'}{dt'^2} \cos \omega t + \frac{d^2x'}{dt'^2} \sin \omega t - 2\omega \left[ \frac{dy'}{dt} \sin \omega t - \frac{dx'}{dt} \cos \omega t \right] - \\&\quad - \omega^2 [y' \cos \omega t + x' \sin \omega t]; \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d^2z'}{dt'^2}.\end{aligned}$$

Вводя компоненты скорости и ускорения, получим

$$\begin{aligned}W_x &= W'_x \cos \omega t - W'_y \sin \omega t - 2\omega [v'_x \sin \omega t + v'_y \cos \omega t] - \\&\quad - \omega^2 (x' \cos \omega t - y' \sin \omega t); \\ W_y &= W'_y \cos \omega t + W'_x \sin \omega t - 2\omega [v'_y \sin \omega t - v'_x \cos \omega t] - \\&\quad - \omega^2 (y' \cos \omega t + x' \sin \omega t); \\ W_z &= W'_z.\end{aligned}$$

Компоненты «истинной» силы  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  (как и компоненты любого трехмерного вектора) меняются по такому же закону, как и координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , т. е. мы имеем

$$\begin{aligned}F_x &= F'_x \cos \omega t - F'_y \sin \omega t \\F_y &= F'_y \cos \omega t + F'_x \sin \omega t \\F_z &= F'_z.\end{aligned}$$

В исходной (инерциальной) системе отсчета справедлив второй закон Ньютона

$$\begin{aligned}F_x &= mW_x \\F_y &= mW_y \\F_z &= mW_z.\end{aligned}$$

Переходя к вращающейся системе  $k'$ , получим

$$\begin{aligned} F'_x \cos \omega t - F'_y \sin \omega t &= m [W'_x \cos \omega t - W'_y \sin \omega t - \\ &- 2\omega (v'_x \sin \omega t + v'_y \cos \omega t) - \omega^2 (x' \cos \omega t - y' \sin \omega t)]; \\ F'_y \cos \omega t + F'_x \sin \omega t &= m [W'_y \cos \omega t + W'_x \sin \omega t - \\ &- 2\omega (v'_y \sin \omega t - v'_x \cos \omega t) - \omega^2 (y' \cos \omega t + x' \sin \omega t)]; \\ F'_z &= mW'_z. \end{aligned}$$

Умножая первое из этих уравнений на  $\cos \omega t$ , а второе на  $\sin \omega t$  и складывая, мы исключим  $F'_y$  и будем иметь

$$F'_x = mW'_x - 2m\omega v'_y - m\omega^2 x'.$$

Умножая первое уравнение на  $\sin \omega t$ , второе на  $\cos \omega t$  и вычитая из второго первое, получим

$$F'_y = mW'_y + 2m\omega v'_x - m\omega^2 y'.$$

Итак, в системе  $k'$  мы имеем уравнения движения

$$\begin{aligned} F'_x &= mW'_x - m\omega^2 x' - 2m\omega v'_y, \\ F'_y &= mW'_y - m\omega^2 y' + 2m\omega v'_x \\ F'_z &= mW'_z. \end{aligned}$$

Вводя вектор угловой скорости системы отсчета  $\vec{\omega}$  (направленный вдоль оси  $OZ$  и связанный с направлением вращения правилом правого винта), мы можем записать эти равенства в векторной форме

$$\vec{F}' = m\vec{W}' - m\omega^2 \vec{r} - 2m[\vec{v} \times \vec{\omega}]. \quad (12.17)$$

Пусть на частицу не действуют никакие силы (в частности, отсутствует «истинное» гравитационное поле), так что  $\vec{F}' = 0$ . Равенство (12.17) даст тогда

$$\vec{W}' = \omega^2 \vec{r} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}]. \quad (13.17)$$

Первое слагаемое в правой части  $\omega^2 \vec{r}$  отлично от нуля и для покоящихся и для движущихся тел и носит название центробежного ускорения. Второе слагаемое возникает только в том случае, если тело движется по отношению к вращающейся системе координат (причем непараллельно оси вращения) и носит название ускорения Кориолиса.

Если ввести «фиктивные» (с точки зрения классической физики) силы, центробежную силу  $m\omega^2 \vec{r}$  и силу Кориолиса  $2m[\vec{v} \times \vec{\omega}]$ ,

$$\vec{F}_{\text{ф.б.}} = m\omega^2 \vec{r} \quad (14.17)$$

$$\vec{F}_k = 2m [\vec{v} \times \vec{\omega}], \quad (15.17)$$

то равенство (12.17) принимает вид

$$\vec{F} + \vec{F}_{ц.с} + \vec{F}_k = m\vec{W}'.$$

Ускорение во вращающейся системе отсчета «создается» совместным действием «истинной» силы, центробежной силы и силы Кориолиса.

Так как центробежная сила и сила Кориолиса пропорциональны массе тела и, следовательно, всем телам (независимо от их массы) сообщают одно и то же ускорение, то эти силы также подобны гравитационным силам.

Во вращающейся лаборатории таким образом возникают «гравитационные» поля двух типов — центробежное «поле» и «поле» Кориолиса.

Центробежное «гравитационное» поле, как видно из формулы (14.17), направлено в любой точке по радиусу от оси вращения и возрастает по мере удаления от оси вращения, т. е. это поле (в отличие от «поля», создаваемого поступательным ускоренным движением) является неоднородным. (Отметим уже здесь, что центробежное «гравитационное» поле резко отличается от истинных гравитационных полей своим поведением на больших расстояниях. Истинные гравитационные поля убывают и стремятся к нулю по мере удаления от масс, создающих поле, в то время как центробежное поле возрастает по мере увеличения расстояния от оси вращения и стремится к бесконечности, когда  $r \rightarrow \infty$ .)

«Поле» Кориолиса, как показывает формула (15.17), действует только на движущиеся тела и зависит не от координат движущегося тела, а от его скорости.

Классическая теория гравитационного поля не знала подобных сил, однако их существование гармонирует со всем духом релятивистской теории — сила, действующая на движущуюся частицу, должна отличаться от силы, действующей на покоящуюся частицу. С подобным положением дел мы сталкивались уже в электродинамике; на покоящийся в электромагнитном поле заряд действует только электрическая сила  $q\vec{E}$ , на движущийся заряд действует и сила магнитная  $\frac{q}{c} [\vec{v} \times \vec{H}]$ .

С этой точки зрения центробежная сила является силой «электрического типа», а сила Кориолиса — силой «магнитного типа». Угловая скорость вращения системы отсчета  $\vec{\omega}$  в этом отношении играет такую же роль, как напряженность магнитного поля  $\vec{H}$ .

Мы рассмотрели в качестве примеров равномерно-ускоренное поступательное движение и равномерное вращательное движение системы отсчета, т. е. движения с ускорением, постоянным во времени. Такие движения, как мы убедились, эквивалентны наличию некоторого постоянного «гравитационного» поля. Нетрудно понять, что произвольное движение системы отсчета с переменным во времени ускорением эквивалентно соответствующему переменному «гравитационному» полю.

Поэтому, обобщая принцип эквивалентности, мы можем сформулировать его следующим образом.

Произвольное движение системы отсчета (связанное с любыми переменными во времени ускорениями, с деформациями координатных осей и т. д.) эквивалентно некоторому (в общем случае переменному и неоднородному) гравитационному полю.

## § 18. Гравитация и геометрия

На протяжении всей этой книги мы видели, какое большое место в теории относительности занимает понятие системы отсчета и возможность перехода от одной системы отсчета к другой.

Одно и то же объективно существующее событие (или процесс) может быть описано в разных системах отсчета, на разных «языках», выбор которых субъективен, относителен.

Так, положение точки на плоскости может быть задано с помощью декартовых координат  $x$  и  $y$ , с помощью полярных координат  $\rho$  и  $\varphi$  (рис. 43), с помощью параболических координат  $\xi$  и  $\eta$ <sup>1</sup> и так далее, причем во всех этих случаях

<sup>1</sup> Название параболические координаты связано с тем, что линии  $\xi = \text{Const} = C_1$  и  $\eta = \text{Const} = C_2$  на плоскости  $x, y$  представляют собой параболы  $y^2 = C_1^2 - 2C_1x$  и  $y^2 = C_2^2 + 2C_2x$ .

мы можем еще произвольно задать положение начала координат и направление координатных осей.

Мы можем для каждого из этих случаев указать «словарь» для перевода с «языка» одной системы координат на «язык» другой системы.

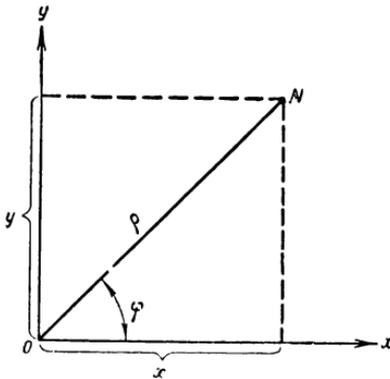


Рис. 43.

Так, например, полярные координаты  $\rho$  и  $\varphi$ , как видно непосредственно из рисунка 43, связаны с декартовыми координатами  $x, y$  формулами

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad x = \rho \cos \varphi;$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}; \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (1.18)$$

Параболические координаты  $\xi, \eta$  связаны с декартовыми координатами  $x, y$  соотношениями

$$\xi = \sqrt{x^2 + y^2} + x; \quad x = \frac{\xi - \eta}{2};$$

$$\eta = \sqrt{x^2 + y^2} - x; \quad y = \sqrt{\xi \eta}. \quad (2.18)$$

В трехмерном случае положение точки в пространстве может быть задано с помощью декартовых координат  $x, y, z$ , с помощью сферических координат  $r, \theta, \varphi$  (рис. 44), с помощью цилиндрических координат  $\rho, \varphi, z$  (рис. 45) и т. д. При этом положение начала координат и направление координатных осей может быть задано произвольно.

«Словарь» для перевода с «языка» сферической системы координат на «язык» декартовой системы координат и обратно может быть найден очень просто. Из треугольника  $ONK$  (рис. 44) имеем

$$z = r \cos \theta.$$

Проекция радиуса вектора на плоскость  $XOY$  равна

$$OM = r \sin \theta.$$

Тогда из  $\triangle OML$  имеем

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi.$$

Таким образом, формулы, связывающие декартовые и сферические координаты, имеют вид

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \\y &= r \sin \theta \sin \varphi \\z &= r \cos \theta.\end{aligned}\tag{3.18}$$

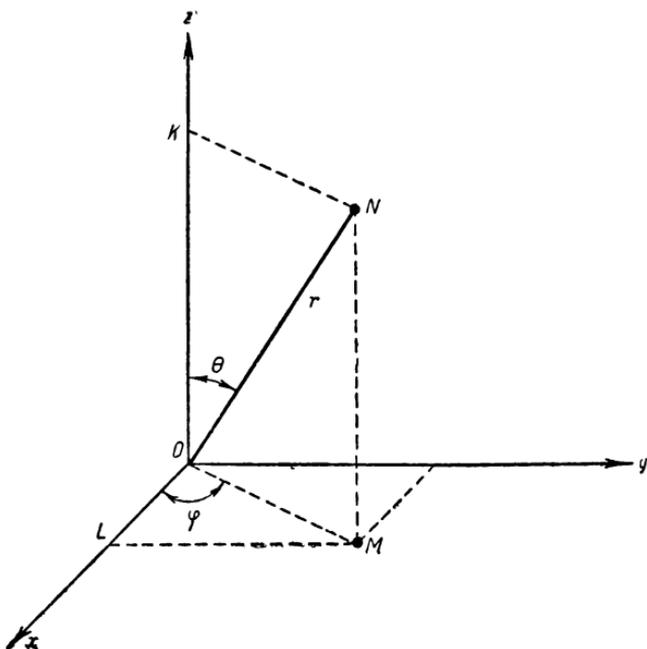


Рис. 44.

Решая эти уравнения относительно  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , получим

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\end{aligned}\tag{4.18}$$

Точно так же нетрудно получить «словарь» для перехода от «языка» цилиндрических координат к «языку» декартовых координат.

Из  $\triangle OML$  имеем

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi \\y &= \rho \sin \varphi.\end{aligned}\tag{5.18}$$

Кроме того, по определению имеем

$$z = z. \quad (5a.18)$$

Из этих формул находим

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \\ z &= z. \end{aligned} \quad (6.18)$$

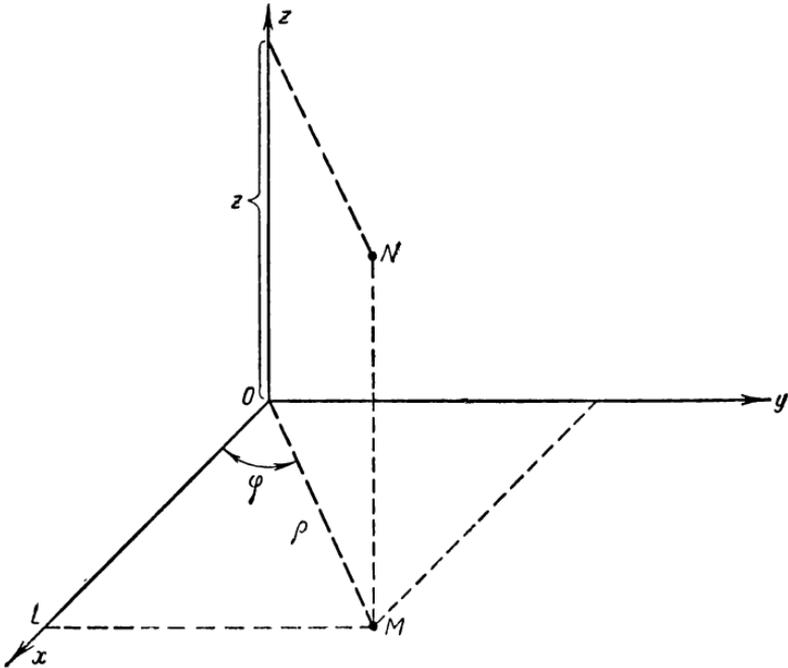


Рис. 45.

Перейдем теперь к случаю движущихся систем отсчета. В случае равномерного поступательного движения системы отсчета «язычком» для перевода служат, как мы знаем, преобразования Лорентца

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

которые в случае малых скоростей ( $v \ll c$ ) переходят в формулы преобразований Галилея

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{8.18}$$

С точки зрения специальной теории относительности переход к произвольной криволинейной сетке пространственных координат  $x, y, z$  и переход к галилеевым системам отсчета исчерпывают те преобразования, при которых возможно описание механических процессов, без изменения основных уравнений механики.

В самом деле, сохраняя в силе второй закон Ньютона (релятивистский или классический), мы можем совершать любые преобразования пространственных координат и переходить к системе отсчета, движущейся только равномерно и прямолинейно. В системе отсчета, движущейся ускоренно, мы вынуждены либо отказаться от второго закона механики, либо вводить фиктивные (с точки зрения классической физики и специальной теории относительности) силы инерции.

Однако рассмотренный нами в предыдущем параграфе принцип эквивалентности в корне меняет положение дел. Мы видели, что переход к ускоренно движущейся системе отсчета эквивалентен появлению «гравитационного» поля.

Поэтому с более общей точки зрения мы можем пользоваться для описания явлений природы любыми произвольным образом движущимися и деформирующимися при движении системами отсчета, вводя при этом соответствующие «гравитационные» поля. Это значит, что вместо декартовых координат  $x, y, z$ , мы можем пользоваться любыми другими координатами  $x_1, x_2, x_3$ , которые являются произвольными функциями декартовых координат и времени. Кроме того, уже в специальной теории относительности выяснилось, что при переходе к движущейся системе отсчета преобразуется и время. Поэтому совместно с координатами  $x_1, x_2, x_3$  должна быть в общем случае введена и новая четвертая координата  $x_4$ , которая также зависит

как от времени  $t$ , так и от пространственных координат  $x, y, z$ .

Иначе говоря, законы природы должны быть инвариантными по отношению к любым преобразованиям всех четырех координат

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1(x, y, z, t) \\x_2 &= f_2(x, y, z, t) \\x_3 &= f_3(x, y, z, t) \\x_4 &= f_4(x, y, z, t).\end{aligned}\tag{9.18}$$

В этом заключается принцип общей ковариантности, который лежит в основе общей теории относительности Эйнштейна.

В связи с этой возможностью перехода к любым криволинейным и произвольным образом движущимся системам отсчета нам важно изучить некоторые особенности геометрии в произвольных координатных системах.

Начнем с геометрии на плоскости.

В декартовых координатах квадрат расстояния между двумя близкими точками выражается, как известно, формулой

$$dl^2 = dx^2 + dy^2,\tag{10.18}$$

т. е. квадрат расстояния представляется в виде суммы квадратов дифференциалов координат  $dx, dy$  с постоянными коэффициентами (равными 1).

Легко видеть, что другие координаты этим свойством уже не обладают. Так, например, в полярных координатах, дифференцируя формулы (10.18), будем иметь

$$\begin{aligned}dx &= d\rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi d\varphi \\dy &= d\rho \sin \varphi + \rho \cos \varphi d\varphi,\end{aligned}$$

откуда, подставляя в (10.18), получим

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2.\tag{11.18}$$

Мы видим, что перед квадратом дифференциала координаты  $\varphi$  появился переменный коэффициент  $\rho^2$ . Совершенно так же в параболических координатах  $\xi, \eta$  имеем

$$\begin{aligned}dx &= \frac{1}{2}(d\xi - d\eta) \\dy &= \frac{1}{2} \left[ d\xi \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} + d\eta \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} \right],\end{aligned}$$

откуда

$$dl^2 = \frac{1}{4} d\xi^2 \left(1 + \frac{\eta}{\xi}\right) + \frac{1}{4} d\eta^2 \left(1 + \frac{\xi}{\eta}\right) \quad (11a.18)$$

и коэффициенты при  $d\xi^2$  и  $d\eta^2$  оказываются переменными.

Однако в случае геометрии на плоскости мы всегда можем перейти от полярных, параболических и других криволинейных координат к декартовой системе координат и тем самым добиться, чтобы  $dl^2$  выражался в виде суммы квадратов координат с постоянными коэффициентами.

Глубокая причина этого заключается в том, что в случае геометрии на плоскости мы имеем дело с «плоским» многообразием, в котором справедливы законы геометрии Эвклида. В частности, сумма углов любого треугольника на этой плоскости равна  $\pi$  и для любого прямоугольного треугольника справедлива теорема Пифагора. Поэтому, если выбрать декартову систему координат, оси которых параллельны катетам прямоугольного треугольника, то квадрат расстояния  $dl^2$  (гипотенузы) будет равен сумме квадратов дифференциалов координат (катетов).

Обратимся теперь к рассмотрению трехмерного пространства. В декартовых координатах квадрат расстояния между двумя близкими точками также выражается суммой квадратов дифференциалов координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  с постоянными коэффициентами (равными единице)

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (12.18)$$

Этим свойством не обладают криволинейные координаты, например сферические и цилиндрические. Действительно, в сферических координатах, дифференцируя формулы (3.18), имеем

$$\begin{aligned} dx &= dr \sin \theta \cos \varphi + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi \cdot d\varphi \\ dy &= dr \sin \theta \sin \varphi + r \cos \theta \sin \varphi \cdot d\theta + r \sin \theta \cos \varphi \cdot d\varphi \\ dz &= dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Подставляя в (12.18) значения  $dx$ ,  $dy$ , и  $dz$ , получим

$$dl^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2. \quad (13.18)$$

Мы видим, что перед квадратами дифференциалов координат  $\varphi$  и  $\theta$  стоят переменные коэффициенты  $r^2 \sin^2 \theta$  и  $r^2$ .

В цилиндрических координатах, дифференцируя (5.18) и (5a.18), имеем

$$\begin{aligned} dx &= d\rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi d\varphi \\ dy &= d\rho \sin \varphi + \rho \cos \varphi d\varphi \\ dz &= dz, \end{aligned}$$

откуда

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (14.18)$$

И здесь перед  $d\varphi^2$  стоит переменный коэффициент  $\rho^2$ .

Однако так же, как и в случае плоскости, мы всегда можем от криволинейных координат (сферических, цилиндрических и т. д.) вернуться к декартовым и привести тем самым выражение  $dl^2$  к сумме квадратов дифференциалов координат.

Ясно, что эта возможность обусловлена тем, что в рассматриваемом трехмерном многообразии справедливы законы геометрии Евклида и, в частности, верна трехмерная теорема Пифагора (квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его ребер).

Принято называть такое многообразие по аналогии с плоскостью «плоским».

Совершенно с иным положением мы сталкиваемся в случае «кривых» многообразий, в которых законы геометрии Евклида неверны.

Рассмотрим в качестве иллюстрации геометрию на поверхности сферы с радиусом  $r=1$ .

В этом двумерном многообразии кратчайшие расстояния между точками измеряются отрезками дуг большого круга, которые играют роль прямых. Нетрудно видеть, что в сферических треугольниках, сторонами которых являются отрезки дуг большого круга, сумма углов треугольника не равна  $\pi$ . Например, в треугольнике, образованном дугой экватора и двумя меридианами, сходящимися в полюсе под прямым углом друг к другу (см. рис. 46), сумма углов равна  $\frac{3\pi}{2}$ .

В связи с этим для сферических треугольников неверна теорема Пифагора и другие положения геометрии Евклида. Квадрат расстояния между двумя близкими точками, лежащими на поверхности такой сферы, может быть найден с помощью формулы (13.18), если в ней положить  $r=1$ ,  $dr=0$ . Тогда получим

$$dl^2 = \sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2. \quad (15.18)$$

При этом в отличие от «плоского» многообразия на сфере нельзя ввести такие координаты, чтобы квадрат расстояния между любыми близкими точками выразился бы как сумма

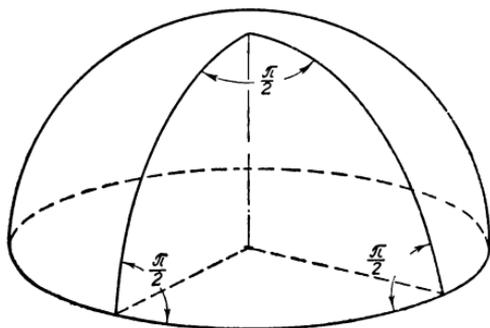


Рис. 46.

квадратов дифференциалов координат с постоянными коэффициентами. Это связано с тем, что поверхность сферы представляет собой «кривое» двумерное многообразие, в котором неприменима геометрия Евклида, и, в частности, неверна теорема Пифагора.

Во всех наших рассуждениях до настоящего момента мы молчаливо исходили из того, что в реальном трехмерном пространстве справедливы законы геометрии Евклида. Однако следует отдать себе ясный отчет в том, что геометрия как наука о свойствах реального пространства представляет собой лишь часть физики и, следовательно, является в основе своей наукой опытной. Аксиомы и постулаты геометрии не являются априорными истинами, врожденными представлениями человеческого разума, а являются обобщением многовекового опыта человечества. На это обстоятельство впервые указал с достаточной четкостью еще Лобачевский, который, построив чисто аксиоматическим путем новую неевклидову геометрию, пытался затем проверить опытным путем, равна ли сумма углов треугольника  $\pi$  или нет, экспериментируя со световыми лучами, соединяющими две удаленные точки на земной поверхности с звездой. Опыты Лобачевского окончились неудачно (и не могли окончиться иначе, так как отступления от законов геометрии Евклида в этом случае очень малы).

Поэтому до создания общей теории относительности не возникало серьезных сомнений во всеобщей спра-

ведливости законов геометрии Евклида. Опыт геодезии, топографии, астрономии, архитектуры и так далее, имеющий давность в несколько тысяч лет, казалось бы, вполне однозначно говорил в пользу геометрии Евклида. Однако создание общей теории относительности коренным образом изменило положение дел.

Мы видели, что уже в специальной теории относительности пространства и время объединяются в единое четырехмерное многообразие, в котором роль расстояния между двумя «мировыми точками» играет интервал

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2. \quad (16.18)$$

Квадрат четырехмерного «расстояния» представляется в виде суммы квадратов дифференциалов координат с постоянными коэффициентами  $(1, 1, 1, -c^2)$ . Это свойство имеет место в любой галилеевой системе отсчета, так как интервал инвариантен по отношению к группе преобразований Лорентца.

Если ввести вместо  $x, y, z$  криволинейные координаты в пространстве (цилиндрические, сферические и пр.), то изменится выражение пространственной части интервала  $dx^2 + dy^2 + dz^2$ , но  $dt^2$  по-прежнему будет входить с коэффициентом  $-c^2$ . Однако если перейти к произвольной ускоренно движущейся системе отсчета, то выражение для интервала существенным образом изменяется. Например, при переходе к системе отсчета, движущейся равномерно ускоренно вдоль оси  $OX$ , мы имеем (в нерелятивистском случае)

$$x = x' + \frac{at^2}{2}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t',$$

откуда

$$dx = dx' + at dt$$

$$dy = dy'$$

$$dz = dz'$$

$$dt = dt',$$

и интервал принимает вид

$$dS^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 + 2at \cdot dx' \cdot dt - (c^2 - a^2 t^2) dt^2.$$

При переходе к равномерно вращающейся системе отсчета мы имели (также в нерелятивистском приближении)

$$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t$$

$$y = y' \cos \omega t + x' \sin \omega t$$

$$z' = z$$

$$t' = t,$$

откуда

$$dx = dx' \cos \omega t - dy' \sin \omega t - \omega (x' \sin \omega t + y' \cos \omega t) dt$$

$$dy = dy' \cos \omega t + dx' \sin \omega t + \omega (x' \cos \omega t - y' \sin \omega t) dt$$

$$dz = dz'$$

$$dt = dt'.$$

Следовательно, квадрат интервала принимает вид

$$dS^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 + [\omega^2 (x'^2 + y'^2) - c^2] dt'^2 - 2\omega y' dx' dt + 2\omega x' dy' dt.$$

Мы видим, что в ускоренно движущихся системах отсчета выражение для квадрата интервала содержит не только квадраты дифференциалов координат, но и произведения дифференциалов разных координат, причем коэффициенты этой квадратичной формы являются в общем случае переменными.

Нетрудно видеть, что, если вместо  $x, y, z, t$  ввести новые координаты в четырехмерном пространстве  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , которые являются произвольными (дифференцируемыми) функциями  $x, y, z, t$ :

$$x_1 = f_1(x, y, z, t)$$

$$x_2 = f_2(x, y, z, t) \tag{17.18}$$

$$x_3 = f_3(x, y, z, t)$$

$$x_4 = f_4(x, y, z, t)$$

(физически это означает переход к произвольным образом движущейся и деформирующейся системе отсчета), то квадрат интервала представится в виде однородной квадратич-

ной формы новых координат с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned}
 dS^2 = & g_{11}(x_1, \dots, x_4) dx_1^2 + g_{22}(x_1, \dots, x_4) dx_2^2 + \\
 & + g_{33}(x_1, \dots, x_4) dx_3^2 + g_{44}(x_1, \dots, x_4) dx_4^2 + \\
 & + 2g_{12}(x_1, \dots, x_4) dx_1 dx_2 + 2g_{13}(x_1, \dots, x_4) dx_1 dx_3 + \\
 & + 2g_{14}(x_1, \dots, x_4) dx_1 dx_4 + 2g_{23}(x_1, \dots, x_4) dx_2 dx_3 + \\
 & + 2g_{24}(x_1, \dots, x_4) dx_2 dx_4 + 2g_{34}(x_1, \dots, x_4) dx_3 dx_4
 \end{aligned}$$

или в более компактной форме

$$dS^2 = \sum_{i=k=1}^4 g_{ik}(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_i dx_k. \quad (18.18)$$

Совокупность величин  $g_{ik}$  образует так называемый метрический тензор. Заметим, что они симметричны

$$g_{ik}(x_1, \dots, x_4) = g_{ki}(x_1, \dots, x_4),$$

и поэтому существует 10 различных компонентов  $g_{ik}$ :  $g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{44}, g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{23}, g_{24}, g_{34}$ .

При переходе от одной системы отсчета к другой компоненты метрического тензора изменяются, однако в этой книге мы лишены возможности рассматривать закон изменения метрического тензора и вытекающие из него следствия.

Отметим теперь следующее чрезвычайно важное обстоятельство. В отсутствии «истинного» гравитационного поля мы всегда можем от криволинейных неинерциальных координат  $x_1, x_2, x_3, x_4$  (например, от вращающейся или равномерно-ускоренной системы отсчета) вернуться к инерциальной декартовой системе отсчета. Тогда «фиктивные» гравитационные силы (например, центробежная сила и сила Кориолиса во вращающейся системе отсчета или сила инерции  $-\vec{m}\vec{a}$  в равномерно-ускоренной системе отсчета) исчезнут. С другой стороны, выражение интервала во всем пространстве вновь примет вид (16.18) и компоненты метрического тензора примут «галилеевы» значения

$$\begin{aligned}
 g_{ik} &= 0, \quad i \neq k; \\
 g_{11} &= g_{22} = g_{33} = 1; \\
 g_{44} &= -c^2.
 \end{aligned} \quad (19.18)$$

Это значит, что в отсутствии «истинного» гравитационного поля геометрия пространства = времени остается псевдоевклидовой геометрией Минковского (а геометрия трехмерного пространства евклидовой), т. е. четырехмерный континуум является «плоским».

С совершенно иным положением дел мы сталкиваемся в том случае, когда имеется «истинное» гравитационное поле. В этом случае никакое преобразование координат  $x_1, x_2, x_3, x_4$  не позволяет привести интервал во всем пространстве к «галилееву» виду (16.18) и компоненты метрического тензора к «галилеевым» значениям (19.18). (Вспомним расстояние между точками на поверхности сферы!)

Математически это следует из того, что в общем случае невозможно удовлетворить шести уравнениям

$$g_{12}(x_1, \dots, x_4) = 0$$

$$g_{13}(x_1, \dots, x_4) = 0$$

$$g_{14}(x_1, \dots, x_4) = 0$$

$$g_{23}(x_1, \dots, x_4) = 0$$

$$g_{24}(x_1, \dots, x_4) = 0$$

$$g_{34}(x_1, \dots, x_4) = 0$$

путем преобразования четырех параметров  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

Физически же это вытекает из той глубокой разницы (уже отмеченной нами выше), которая существует между «истинными» и «фиктивными» гравитационными полями.

«Истинные» гравитационные поля исчезают на большом расстоянии от масс, создающих поле, в то время как «фиктивные» гравитационные поля, вообще говоря, не обладают этим свойством (например, «поле» —  $\vec{ta}$  в системе отсчета, движущейся равномерно-ускоренно, однородно, т. е. одинаково во всех точках пространства, центробежное «поле» —  $ma^2\vec{r}$  нарастает с удалением от оси вращения и т. д.). Поэтому «уничтожить» гравитационное поле во всем пространстве никаким выбором системы отсчета невозможно, «уничтожив» истинное гравитационное поле на конечных расстояниях, мы неизбежно вводим «фиктивное» гравитационное поле на больших расстояниях (или наоборот). Подходящий выбор системы отсчета позволяет лишь «устранить» гравитационное поле в малой области пространства, где поле можно считать однородным. (Для этого надо перейти к такой системе отсчета, которая «падает» в поле, т. е. движется с ус-

корением  $\vec{a}$ , создаваемым полем.) Поэтому в малых областях пространства «истинные» гравитационные поля и «фиктивные» гравитационные поля физически неотличимы. (Именно поэтому мы предпочитаем слова «истинное» и «фиктивное» брать в кавычках.) Итак, при наличии «истинного» гравитационного поля пространство-время представляет собой «кривое» четырехмерное многообразие, в котором не имеет места псевдоевклидова геометрия Минковского. Это значит, что в гравитационном поле геометрия трехмерного пространства становится неевклидовой и изменяется течение времени.

Таким образом, в общей теории относительности между материей, пространством и временем существует значительно более глубокая связь, чем в классической физике.

В ньютоновской физике пространство и время рассматривались как вместительница вещей и событий, не зависящие от плотности материи.

Вопреки этому метафизическому представлению, в общей теории относительности выясняется, что геометрические свойства пространства и течение времени определяются плотностью материи в данной области пространства. В тех местах вселенной, где существует скопление масс и, следовательно, существует сильное гравитационное поле, пространство и время «искривлено» — геометрия становится неевклидовой и (как можно показать) замедляется ход часов.

Можно провести следующую интересную аналогию с искривлением двухмерного многообразия.

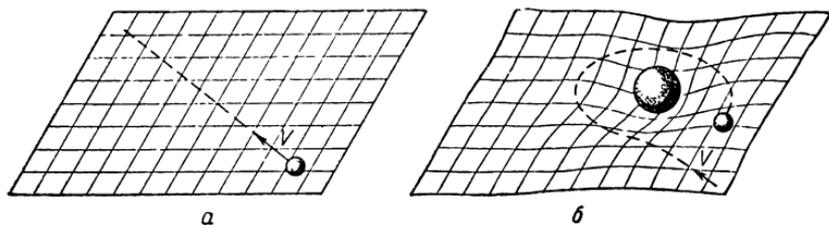


Рис. 47.

Представим себе горизонтально натянутое полотнище (резиновую мембрану), на котором нанесена декартова сетка координат (рис. 47,а). На этой плоскости справедливы законы геометрии Евклида: сумма углов треугольника равна двум прямым углам, выполняется теорема Пифагора

и т. д. С другой стороны, легкий шарик, пущенный с некоторой начальной скоростью  $v$  по этой плоскости, будет (если пренебречь трением) двигаться по инерции равномерно и прямолинейно. Пусть теперь на полотнище (рис. 47,б) помещено тяжелое тело. Под действием тяжести этого тела полотнище прогнется и будет представлять собой «кривое» двумерное многообразие. На этом многообразии законы геометрии Евклида будут уже неверны (вспомним геометрию на сфере) и шарик, пущенный на это искривленное полотнище, будет скатываться («притягиваться») к телу.

На этом примере мы видим, как «гравитация» и «искривление» (изменение законов геометрии) возникают совместно при наличии массивного тела. (Конечно, этот пример дает чисто внешнюю аналогию с тем, что имеет место в реальном пространстве-времени. В частности, «искривление» трехмерного, а тем более четырехмерного пространства мы не можем себе представить наглядно — этот термин означает только изменение законов геометрии.)

Из всего вышесказанного следует, что, поскольку гравитационное поле и изменение законов геометрии возникают совместно, компоненты метрического тензора  $g_{ik}$  имеют двойной физический смысл: 1) они характеризуют законы геометрии (метрики) четырехмерного пространства (с чем и связано название метрический тензор); 2) они характеризуют интенсивность гравитационного поля — являются гравитационными потенциалами.

Поэтому в теории гравитационного поля  $g_{ik}$  играют такую же роль, как векторный и скалярный потенциалы  $\vec{A}$  и  $\varphi$  в теории электромагнитного поля. Более детальная теория, на которой мы в этой книге не можем останавливаться, приводит к установлению уравнений, которым удовлетворяют потенциалы  $g_{ik}$ . Оказывается, что это уравнение принадлежит к такому же типу, как и уравнение для  $\vec{A}$  и  $\varphi$  в электродинамике. В частности, в вакууме мы имеем волновые уравнения, из которых вытекает, что гравитационные действия распространяются в пространстве не мгновенно (как это считалось в классической физике), а со скоростью света в вакууме  $c$ .

Мы можем несколько более детально рассмотреть случай слабого гравитационного поля и найти в этом случае приближенные выражения для компонент метрического тензора.

С этой целью выразим энергию материальной точки через элемент интервала сначала в отсутствии гравитационного поля (в рамках специальной теории относительности). Это позволит нам, зная выражение интервала в общей теории относительности, обобщить полученный результат на случай наличия гравитационного поля. В специальной теории относительности мы имеем для энергии свободно движущейся материальной точки выражение

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}}}.$$

Умножая числитель и знаменатель этого выражения на  $icdt$ , получим

$$E = im_0 c^3 \frac{dt}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2}}.$$

Рассматривая  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ,  $dt$  как независимые переменные (что допустимо, так как они представляют собой приращения независимых переменных  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ ), нетрудно проверить тождество

$$\frac{-c^2 dt}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2}} = \frac{\partial}{\partial(dt)} (\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2}) = \frac{\partial(dS)}{\partial(dt)},$$

откуда мы и получаем интересующее нас выражение энергии через элемент интервала

$$E = -im_0 c \frac{\partial(dS)}{\partial(dt)}. \quad (20.18)$$

В присутствии гравитационного поля элемент интервала выражается, как мы знаем, формулой

$$dS = \sqrt{\sum_{i,k=1}^4 g_{ik} dx_i dx_k}$$

(будем в этом рассуждении пользоваться обозначениями  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ,  $x_4 = t$ ), тогда для вычисления энергии получаем выражение

$$E = -im_0 c \frac{\partial}{\partial(dx_4)} \left( \sqrt{\sum_{i,k=1}^4 g_{ik}(x_1, \dots, x_4) dx_i dx_k} \right) \quad (21.18)$$

или подробнее

$$E = -im_0 c \frac{\partial}{\partial(dx_4)} \sqrt{g_{11} dx_1^2 + g_{22} dx_2^2 + g_{33} dx_3^2 + g_{44} dx_4^2 + 2g_{12} dx_1 dx_2 + 2g_{13} dx_1 dx_3 + 2g_{14} dx_1 dx_4 + 2g_{23} dx_2 dx_3 + 2g_{24} dx_2 dx_4 + 2g_{34} dx_3 dx_4}.$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$E = -im_0c \frac{g_{44}dx_4 + g_{34}dx_3 + g_{24}dx_2 + g_{14}dx_1}{\sqrt{\sum_{i,k=1}^4 g_{ik}dx_i dx_k}}. \quad (22.18)$$

В том случае, когда справедлива Ньютонова теория тяготения (достаточно слабое гравитационное поле), компоненты метрического тензора должны мало отличаться от своих галилеевых значений, т. е. мы будем иметь

$$\begin{aligned} g_{11} &= g_{22} = g_{33} = 1 + p; \\ g_{44} &= -c^2(1 + q); \\ g_{\alpha\beta} &= r_{\alpha\beta}; \quad \alpha \neq \beta, \end{aligned}$$

где  $p, q, r_{\alpha\beta}$  малы по сравнению с единицей. Тогда выражение (18.22) примет вид (если вынести из-под знака корня множитель  $i$ , поделить числитель и знаменатель на  $cdx_4 = = cdt$  и ввести обозначения

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= u_x, \quad \frac{dx_2}{dt} = u_y; \quad \frac{dx_3}{dt} = u_z) \\ E &= m_0c^2 \frac{1+q - r_{34} \frac{u_z}{c^2} - r_{24} \frac{u_y}{c^2} - r_{14} \frac{u_x}{c^2}}{\sqrt{1+q - \frac{u^2}{c^2}(1+p) - 2r_{12} \frac{u_x u_y}{c^2} - 2r_{13} \frac{u_x u_z}{c^2} - \\ &\quad - 2r_{23} \frac{u_y u_z}{c^2} - 2r_{14} \frac{u_x}{c^2} - 2r_{24} \frac{u_y}{c^2} - 2r_{34} \frac{u_z}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Так как в слабом гравитационном поле малы и скорости, приобретаемые телом ( $u \ll c$ ), то все слагаемые в последнем выражении, содержащие  $p$  и  $r_{\alpha\beta}$ , должны быть отброшены как малые величины более высокого порядка малости (чем  $q$  и  $\frac{u^2}{c^2}$ ) и мы получаем с точностью до малых первого порядка (по отношению к  $q$  и  $\frac{u^2}{c^2}$ )

$$\begin{aligned} E &= m_0c^2 \frac{1+q}{\sqrt{1+q - \frac{u^2}{c^2}}} \cong m_0c^2(1+q) \left(1 - \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right) = \\ &= m_0c^2 + \frac{m_0u^2}{2} + \frac{1}{2}qm_0c^2. \end{aligned}$$

Сравнивая последнее выражение с формулой для энергии нерелятивистской частицы в ньютоновом гравитационном поле

$$E = m_0 c^2 + \frac{m_0 u^2}{2} + m_0 \Phi,$$

где  $\Phi$  гравитационный ньютонов потенциал (потенциальная энергия, отнесенная к единице массы), получим равенство

$$m_0 c^2 + \frac{m_0 u^2}{2} + \frac{1}{2} q m_0 c^2 = m_0 c^2 + \frac{m_0 u^2}{2} + m_0 \Phi,$$

откуда

$$q = \frac{2\Phi}{c^2},$$

$$g_{44} = -c^2 \left( 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) = -c^2 - 2\Phi. \quad (23.18)$$

Заметим, что поправки к остальным компонентам  $g_{ik}$  рассмотренным методом не могут быть получены, так как они входят в выражение для энергии с малыми множителями  $\frac{u_i}{c}$  и  $\frac{u_i u_k}{c^2}$  и должны быть поэтому отброшены.

Итак, в слабом гравитационном поле мы имеем для интервала выражение

$$dS^2 = (1+p)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (c^2 + 2\Phi) dt^2 + \\ + 2 \sum_{n=1}^3 r_{n4} dx_n dt + 2 \sum_{\substack{m,n=1 \\ (m \neq n)}}^3 r_{mn} dx_n dx_m.$$

Пусть события, разделенные интервалом  $dS$ , происходят в одной точке пространства.

Тогда

$$dx = dy = dz = 0$$

и

$$dS^2 = -(c^2 + 2\Phi) dt^2.$$

С другой стороны (см. § 9), интервал связан с собственным временем  $d\tau$  соотношением

$$dS^2 = -c^2 d\tau^2.$$

Приравнивая правые части полученных формул, будем иметь

$$d\tau = dt \sqrt{1 + \frac{2\Phi}{c^2}}. \quad (25.18)$$

Мы видим, что собственное время течет тем медленнее, чем

больше абсолютная величина гравитационного потенциала ( $\Phi < 0$ ), т. е. чем сильнее в данной точке гравитационное поле.

Рассмотрим в заключение вопрос об экспериментальном подтверждении общей теории относительности.

До последнего времени такая проверка могла быть проведена только с помощью астрономических наблюдений, так как гравитационное поле Земли явилось чересчур слабым, чтобы вызвать ожидаемые эффекты.

Существует три эффекта, которые при современном уровне техники астрономических наблюдений могут быть обнаружены.

1) Красное смещение спектральных линий.

Мы видели, что в гравитационном поле ход часов замедляется, так что показания часов  $\tau$ , находящихся в гравитационном поле, связаны с показаниями часов  $t$ , находящихся вне поля, формулой

$$\tau = t \sqrt{1 + \frac{2\Phi}{c^2}} \cong t \left( 1 + \frac{\Phi}{c^2} \right).$$

Так как частота колебаний светового вектора обратно пропорциональна времени  $\tau$ , за которое совершено определенное число колебаний  $N$ , то для частоты колебаний в гравитационном поле  $\omega$  будем иметь

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\Phi}{c^2}} \cong \omega_0 \left( 1 - \frac{\Phi}{c^2} \right),$$

где  $\omega$  — частота световых колебаний в отсутствии поля. Частота света увеличивается при возрастании абсолютной величины гравитационного потенциала. В частности, в сферически симметричном гравитационном поле звезды в нерелятивистском приближении имеем для гравитационной потенциальной энергии

$$\Pi = -\gamma \frac{mM}{R},$$

откуда

$$\Phi = \frac{\Pi}{m} = -\gamma \frac{M}{R}$$

и, следовательно,

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{\gamma M}{Rc^2} \right),$$

т. е. частота света, испущенного звездой,  $\omega$ , больше

$\omega_2$  — частоты света, воспринятого наблюдателем на Земле:

$$\omega_1 = \omega_0 \left( 1 + \frac{\gamma M}{Rc^2} \right);$$

$$\omega_2 \approx \omega_0.$$

(Мы естественно пренебрегаем при этом слабым гравитационным полем Земли.)

Таким образом, частоты спектральных линий определенного элемента (например, водорода), испущенных на звезде и воспринятых земным наблюдателем, будут отличаться на

$$\Delta\omega = \omega_0 \frac{\gamma M}{Rc^2}. \quad (26.18)$$

Это гравитационное смещение спектральных линий в красную часть спектра для Солнца оказывается очень малым и находится на границе возможностей измерения.

Однако для очень плотных звезд (так называемых белых карликов) с большой массой  $M$  и малым радиусом  $R$  оно является вполне измеримым и наблюдение «красного смещения» подтверждает теоретические ожидания.

2) Отклонение световых лучей в поле тяготения Солнца.

Общая теория относительности приводит к выводу, что световые лучи, проходя мимо массивного тела, должны в его гравитационном поле отклоняться в сторону этого тела (рис. 48). Качественно это обстоятельство понятно уже в рамках специальной теории относительности. Свет, облада

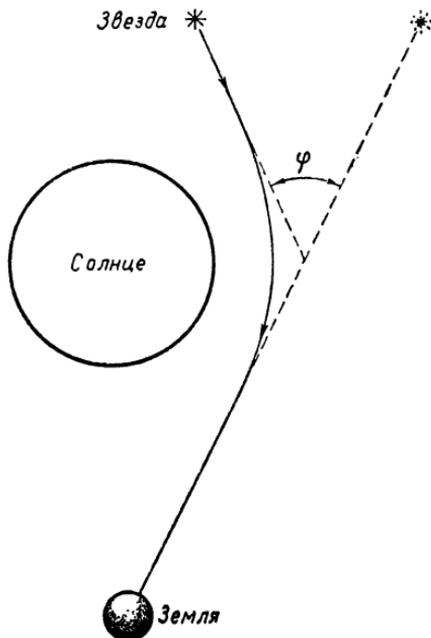


Рис. 48.

дая энергией, тем самым обладает и массой  $m$  ( $m = \frac{E}{c^2}$ ), поэтому гравитационные силы должны искривлять свето-

вые лучи, притягивая их к телу, создающему поле. Однако количественно общая теория относительности дает несколько иной результат, чем специальная теория относительности (это связано с изменением метрики в гравитационном поле), а именно угол, на который отклоняется световой луч, проходя на расстоянии  $R$  от центра тела, оказывается равным

$$\varphi = \frac{4\gamma M}{Rc^2}. \quad (27.18)$$

В случае Солнца это отклонение составляет  $1,75''$ . Отклонение световых лучей, идущих от звезд мимо Солнца на Землю, может наблюдаться только при затмениях Солнца, когда становятся видимыми звезды, находящиеся на небесной сфере в непосредственной близости от его диска. Такие наблюдения, по-видимому, находятся в удовлетворительном согласии с формулой (27.18), однако погрешность этих наблюдений немногим меньше, чем ожидаемый результат ( $1,75''$ ), поэтому согласие эксперимента и теории не имеет в этом случае решающего значения.

### 3) Движение перигелия планет.

Мы видели, что из общей теории относительности вытекает неточность закона тяготения Ньютона. В связи с этим и закон движения планет в теории Эйнштейна оказывается более сложным, чем в классической теории гравитации. В грубом приближении траектории планет оказываются эллипсами, но уже в следующем приближении выясняется, что большие полуоси этих эллипсов не являются неподвижными, а медленно вращаются в плоскости эллипса (см. рис. 49).

Угол поворота перигелия планеты  $\alpha$ , отнесенный к одному обороту планеты по эллипсу, оказывается равным

$$\alpha = \frac{24\pi^2 a^2}{c^2 T^2 (1 - e^2)}, \quad (28.18)$$

где  $a$  — большая полуось эллипса,  $T$  — период обращения и  $e$  — эксцентриситет эллипса.

Из всех планет наибольшее значение угол  $\alpha$  имеет для Меркурия, для которого он достигает  $43''$  за столетие, что

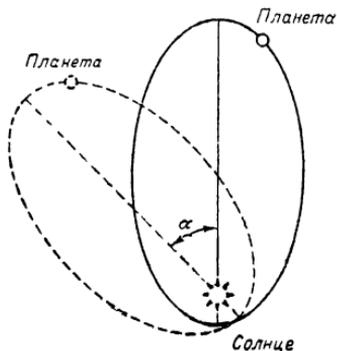


Рис. 49.

находится в хорошем согласии с астрономическими наблюдениями, дающими 42,6''.

Новые весьма широкие возможности экспериментальной проверки следствий общей теории относительности открывает создание искусственных спутников Земли и Солнца. Речь идет прежде всего о вращении перигелия орбит спутников и о смещении линий спектра.

Угол поворота перигелия орбиты спутника за один период может быть сделан значительно большим, чем для Меркурия. В самом деле, согласно формуле (28.18) этот угол прямо пропорционален квадрату большой полуоси эллипса, обратно пропорционален квадрату периода и увеличивается с увеличением эксцентриситета орбиты. Хотя большая полуось эллиптической орбиты спутников Земли значительно меньше, чем для Меркурия, но благодаря меньшему периоду обращения и возможности запуска спутника с большим эксцентриситетом орбиты, угол вращения перигелия может быть доведен до значений порядка 1500'' за столетие, что больше чем в 30 раз превышает значение  $\alpha$  для Меркурия. Следует при этом отметить, что сравнение теории с экспериментом будет существенно затрудняться тем, что поворот перигелия вызывается не только эффектом общей теории относительности, но и рядом других причин (сопротивление атмосферы, влияние Луны, несферическое распределение масс в Земле). Однако, по-видимому, все эти эффекты можно будет учесть по мере накопления наблюдений, и проверка формулы (28.18) станет с течением времени вполне реальной.

Вторая возможность экспериментальной проверки общей теории относительности на спутниках связана с измерением частоты радиоволн, испущенных радиопередатчиком спутника. В этом случае, в противоположность рассмотренному ранее эффекту, мы имеем смещение не в «красную», а в «фиолетовую» часть спектра.

Изменение частоты может быть найдено следующим образом. Для частоты радиоволн, испущенных спутником и воспринятых на Земле, имеем соответственно

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_0 \left( 1 - \frac{\varphi}{c^2} \right) = \omega_0 \left( 1 + \frac{\gamma M}{c^2(R+h)} \right); \\ \omega_2 &= \omega_0 \left( 1 - \frac{\varphi}{c^2} \right) = \omega_0 \left( 1 + \frac{\gamma M}{c^2 R} \right),\end{aligned}$$

где  $R$  — радиус Земли и  $h$  — высота спутника над Землей.

Отсюда имеем

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0 \left( \frac{\gamma M}{c^2 R} - \frac{\gamma M}{c^2 (R+h)} \right) \approx \omega_0 \frac{\gamma M h}{c^2 R^2} \left( 1 - \frac{h}{R} \right)$$

и так как  $\frac{\gamma M}{R^2} = g$  есть ускорение силы тяжести на поверхности Земли, то окончательно получим

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{gh}{c^2} \left( 1 - \frac{h}{R} \right).$$

Взяв для ориентировки  $h = 1500$  км, находим

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 10^{-10}.$$

Такое изменение частоты уже в настоящее время доступно измерению, поскольку так называемые молекулярные генераторы и атомные часы имеют стабильность частоты порядка  $10^{-9} - 10^{-10}$ .

Следует, однако, и в этом случае указать на те трудности, которые возникнут при сравнении теории с экспериментом в связи с тем, что изменение частоты возникает при движении спутника также благодаря эффекту Доплера. Поэтому проверка теории может быть осуществлена только на достаточно удаленных от Земли и медленно движущихся спутниках.

Наконец, отметим, что использование спутников позволяет в принципе наблюдать и еще один — четвертый — эффект общей теории относительности. Этот эффект заключается в том, что движение спутников вокруг массивного центрального тела, вращающегося вокруг своей оси, происходит не так, как в случае покоящегося центрального тела. Это связано с тем, что при вращении центрального тела возникают силы «магнитного» типа (похожие на силы Кориолиса). Детальная теория показывает, что наличие этих сил должно приводить к дополнительному повороту перигелия эллиптической орбиты спутника на угол порядка  $50''$  за столетие (для планет солнечной системы этот эффект очень мал — для Меркурия, например, он составляет всего  $0,01''$  за столетие).

Можно рассчитывать, что в дальнейшем по мере совершенствования методов теоретического расчета и наблюдения орбит спутников этот эффект также можно будет обнаружить и сравнить результаты наблюдений с предсказаниями теории.

Любая книга, посвященная изложению теории относительности, была бы незавершенной без анализа философского содержания релятивистской механики. Ленин в книге «Материализм и эмпириокритицизм» писал (цитируя Энгельса) «с каждым, составляющим эпоху открытием даже в естественноисторической области» (не говоря уже об истории человечества) материализм неизбежно должен изменять свою форму» (В. И. Ленин, Сочинения, т. 14, стр. 238). Это высказывание в полной мере относится и к теории относительности.

Какой же вклад в марксистскую философию внесло появление на исторической арене теории относительности?

Диалектический материализм учит нас, что пространство и время представляют собой формы существования движущейся материи, существующие столь же объективно, как и сама материя. Но если это так, то пространство и время должны быть неразрывно связаны друг с другом и с движущейся материей. Как невозможно мыслить материю вне пространства и времени, так же немислимо и существование пространства и времени, оторванных от материи. Поэтому метафизическое представление об абсолютном пространстве как «вместилище» предметов и об абсолютном времени как «вместилище» событий, господствовавшее в механике Ньютона, неизбежно должно было рухнуть в ходе развития науки.

Глубокое революционное значение теории относительности, являющейся современной физической теорией пространства, времени и тяготения, как раз и заключается в том, что она раскрыла связь между пространством и временем, с одной стороны, и свойствами движущейся материи, с другой стороны.

Движение в физическом смысле всегда относительно, поскольку оно представляет собой перемещение одних материальных тел по отношению к другим, а не по отношению к несуществующему абсолютному пространству Ньютона.

Но тогда и пространство и время, как формы существования движущейся материи, также должны быть относительными.

Именно это обстоятельство и вскрыто специальной теорией относительности в учении об относительности пространственных расстояний  $l$  и промежутков времени  $\tau$ .

Глубокий смысл относительности этих величин заключается в том, что свойства пространства и времени тесно связаны с движением материи (движением лаборатории или системы отсчета), обуславливаются движением материи.

Это обстоятельство полностью соответствует марксистскому учению о диалектическом соотношении формы и содержания. Однако, как мы видели, из двух относительных величин  $l$  и  $\tau$  можно составить безотносительную, абсолютную величину — интервал  $S = \sqrt{l^2 - c^2\tau^2}$ . Абсолютность интервала  $S$  вскрывает глубокую взаимосвязь пространства и времени друг с другом и с одним из основных законов природы — законом причинно-следственной связи. В самом деле, мы видели, что причинно-следственная связь возможна только между событиями, разделенными времениподобными интервалами и, наоборот, такая связь невозможна для событий, разделенных пространственно-подобными интервалами.

Таким образом, теория относительности, основываясь на том, что любые взаимодействия распространяются в пространстве не мгновенно, а с определенной скоростью, не превышающей скорость света в вакууме, вскрывает новые черты закона причинно-следственной связи, неизвестные в классической физике.

Взаимная связь пространственных расстояний и временных промежутков приводит, как мы видели, к представлению о едином четырехмерном многообразии — пространстве-времени (четырёхмерный «мир» Минковского).

Таким образом, специальная теория относительности связывает оторванные друг от друга в механике Ньютона пространство и время в единую форму существования материи — пространство-время. Это не значит, однако, что в релятивистской механике стирается различие между пространством и временем (против подобной ошибки серьезно предостерегал и сам Эйнштейн). Между этими формами существования материи существует глубокое отличие. Пространство характеризует взаиморасположение тел (дальше и ближе, левее и правее, выше и ниже), имеет три измерения и изотропно (т. е. одинаково во всех направлениях, возможно движение и в прямом и в обратном направлении осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  координатной системы). Время характеризует порядок следования событий (раньше и позже), имеет одно измерение и имеет необратимый характер (попятное движение во времени, возврат в прошлое, невозможен).

Как мы видели на протяжении всей книги, теория относительности в настоящее время не только подтверждена огромным количеством экспериментальных фактов, но и стала необходимой основой целого ряда инженерно-физических расчетов (выделение энергии в урановых и плутониевых котлах, в термоядерных установках будущего, расчет ускорителей заряженных частиц, атомных и водородных бомб и т. д.).

Поскольку следствия теории относительности проверены высшим критерием научного познания — человеческой практикой, то в области ее применимости механика Эйнштейна является заведомо правильной.

Резюмируя вышесказанное, мы хотим подчеркнуть следующее. Теория относительности представляет собой современную физическую теорию пространства, времени и тяготения. Она вскрыла глубокую взаимосвязь пространства и времени друг с другом и с движущейся материей. Эта взаимосвязь объединяет пространство и время в единую форму существования движущейся материи — пространство-время, не затрагивая в то же время своеобразия, специфичности каждой из этих форм. Объединение пространства и времени в единое четырехмерное многообразие тесно связано с важнейшим законом движения материи — законом причинно-следственной связи. Теория относительности вскрывает его новые черты, неизвестные в классической физике.

Взаимосвязь пространства и времени с движущейся материей обуславливает законы геометрии пространства, законы течения времени и вскрывает нам истинную природу гравитации.

Таким образом, пространство и время, будучи неразрывно связанными с движущейся материей, существуют столь же объективно и независимо от нашего сознания, как и сама материя. Поэтому специальная теория относительности дает нам блестящее подтверждение марксистско-ленинского учения об объективном характере пространства и времени. В этом состоит истинное гносеологическое значение специальной теории относительности.

---

Цена  
3р.55к.

